CHAP 9 - ANALYSE ASYMPTOTIQUE

1 Relations de comparaison

1.1 Comparaison de fonctions

Définition 1

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage de a** toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a-h, a+h[$ où h désigne un réel non nul.
- On appelle **voisinage de** $+\infty$ (resp. de $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de le forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$), où A est un réel.
- Si f est définie sur un intervalle I, on dit que f est définie **au voisinage de a** (réel ou infini) si tout voisinage de a rencontre I.
- On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de a** si elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a.

Définition 2

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini). On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a (si $a \in \mathbb{R}$).

- On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a , et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Proposition 1

f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Exemple 1

(a) Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_m x^m$ avec $n > m, a_n \neq 0, a_m \neq 0$ alors

$$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

(b) Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ on a :

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$$

(c) Pour $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ on a :

$$(\ln x)^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

1.2 Propriétés

Proposition 2 Transitivité des relations
Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini).

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o\left(h(x)\right)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(h(x)\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O\left(h(x)\right)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(h(x)\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

Proposition 3 Somme
Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini).

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(h(x)\right)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o\left(h(x)\right)$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} o\left(h(x)\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(h(x)\right)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O\left(h(x)\right)$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} O\left(h(x)\right)$.

Attention ! La relation d'équivalence entre deux fonctions n'est pas compatible avec l'addition.
Par exemple, si on considère $f : x \mapsto x^2 + x$ et $g : x \mapsto x^3 - x$, alors on a : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, mais $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Proposition 4
La relation d'équivalence entre deux fonctions est compatible avec le produit et l'inverse :
si f_1, f_2, g_1 et g_2 sont définies au voisinage de a, ne s'annulant pas au voisinage de a sauf éventuellement en a (si $a \in \mathbb{R}$) alors on a :

$$\left(f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)\right) \quad \Rightarrow \quad \left(f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x) \quad \text{et} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right)$$

Proposition 5
On suppose que f et g sont définies au voisinage de a (fini ou infini), ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a (si $a \in \mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

- Si h est une fonction telle qu'au voisinage de a on ait $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
- Si $\lim\limits_a f = l$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_a g = l$.
- Au voisinage de a, f et g sont de même signe.
- Soit h une fonction définie sur un intervalle J telle que $f \circ h$ et $g \circ h$ soient définies au voisinage de b avec $\lim\limits_b h = a$. Alors
$$f \circ h(x) \underset{x\to b}{\sim} g \circ h(x)$$
- Si f est une fonction positive au voisinage de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$f^{\alpha}(x) \underset{x\to a}{\sim} g^{\alpha}(x)$$
$$\mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)} \iff \lim_a (f-g) = 0$$

  Attention ! On peut avoir $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to a}{\not\sim} \mathrm{e}^{g(x)}$.
  Par exemple, on a : $x+1 \underset{x\to +\infty}{\sim} x$ mais $\mathrm{e}^{x+1} \underset{x\to +\infty}{\not\sim} \mathrm{e}^{x}$.

- Si f est strictement positive au voisinage de a et si $\lim_a f = b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ alors

$$\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$$

Attention ! On peut avoir $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\not\sim} \ln(g(x))$.
Par exemple, on a $x+1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2+1$, mais $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\not\sim} \ln(x^2+1)$.

1.3 Cas des suites

On considère des suites (u_n) et (v_n), réelles ou complexes, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Définition 3

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

- On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$ si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
- On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Proposition 6
$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$

2 Développements limités

2.1 Notion de développement limité

Définition 4
Etant donnée une partie I de $\mathbb{R}$, on dit que $a \in \mathbb{R}$ est **un point intérieur de** I si I contient un voisinage de a. On note $a \in \mathring{I}$.

Dans la suite du paragraphe, on suppose que f est définie sur un intervalle I et que $a \in \mathring{I}$.
n désigne un entier naturel.

Définition 5
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et une fonction ε définie sur I, telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Proposition 7
Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors

$$\exists!(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Cette égalité s'appelle **le développement limité de f à l'ordre n en a**, que l'on note $\mathrm{DL}_n(a)$.
On a également

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + o\left(h^n\right)$$

Définition 6
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0+\alpha_1(x-a)+\cdots+\alpha_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$, l'expression $\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\cdots+\alpha_n(x-a)^n$ s'appelle **la partie régulière** du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f

Exemple 2
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Proposition 8
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière $P(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\cdots+\alpha_n(x-a)^n$, alors pour tout $p\in[\![0,n-1]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ dont la partie régulière est obtenue **par troncature** de P au degré p, c'est-à-dire : $f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0+\alpha_1(x-a)+\cdots+\alpha_p(x-a)^p+o\left((x-a)^p\right)$.

Théorème 1 Formule de Taylor-Young
Si f admet une dérivée n-ème en a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'écrit :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

Remarque 1
Si f est de classe C^∞ sur I, alors elle admet un développement limité à tout ordre en $a\in\mathring{I}$.

Exemple 3
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

2.2 Opérations

Proposition 9 Somme et produit
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et $a\in\mathring{I}$.
On suppose que f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$ de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement.
- Pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f+\mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière $\lambda P(x)+\mu Q(x)$.
- La fonction fg admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant $P(x)Q(x)$ au degré n.

Exemple 4
$$\mathrm{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

Proposition 10
On suppose $n\geq 2$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$, alors, en notant $p=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, on a :
- Si f est paire, alors $\forall k\in[\![0,p-1]\!], \alpha_{2k+1}=0$.
- Si f est impaire, alors $\forall k\in[\![0,p]\!], \alpha_{2k}=0$.

Proposition 11 Composition

Soient I et J des intervalles tels que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et $0 \in \overset{\circ}{J}$, f une fonction définie sur I admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P(x)$ et g une fonction définie sur J admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $Q(x)$. On suppose que $f(I) \subset J$.
Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant $Q(P(x))$ au degré n.

Exemple 5

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

2.3 Primitivation, dérivation

Théorème 2 Primitivation

Soient I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, f une fonction définie sur I admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P(x)$, F une primitive de f de I, et Q la primitive de P telle que $Q(0) = F(0)$.
Alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de partie régulière $Q(x)$.

Exemple 6

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Théorème 3 Dérivation

Soient I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, f une fonction définie sur I admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P(x)$. Si f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$, alors sa partie régulière est $P'(x)$.

Attention ! La condition f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ est indispensable.
Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

admet un $\mathrm{DL}_2(0)$, mais f' n'est pas dérivable en 0, elle n'admet donc pas de $\mathrm{DL}_1(0)$.

3 Applications

3.1 Prolongement en un point

Proposition 12

Soient f une fonction définie sur I et a une borne finie de I, n'appartenant pas à I.
Si $f(x) \underset{x \to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o(x-a)$, alors f se prolonge par continuité en a, en une fonction g telle que $g(a) = \alpha_0$, admettant un $\mathrm{DL}_1(a)$ de partie régulière $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a)$.
De plus, la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a a pour équation $y = P(x)$.

Proposition 13

Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ $(n \geq 2)$ de partie régulière $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n$, alors la position de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a par rapport à celle-ci est déterminée par le signe de $\alpha_p(x-a)^p$, où p est le plus petit entier tel que $p \geq 2$ et $\alpha_p \neq 0$.

3.2 Recherche d'asymptote

Définition 7
Soient D une partie non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur D.
On dit que **f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ (resp. $-\infty$)** s'il existe $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε définie sur D telle que $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$ (resp. $\lim\limits_{-\infty} \varepsilon = 0$) tels qu'au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) on a :

$$f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

On note $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{x} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ (resp. $f(x) \underset{x \to -\infty}{=} \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{x} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$)
Une telle expression s'appelle **développement asymptotique au voisinage de** $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 14
Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$, telle qu'au voisinage de $\pm\infty$, pour $n \geq 1$ on ait :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{=} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Alors, la droite d'équation $y = \alpha_0 x + \alpha_1$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.
De plus, la position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{\alpha_p}{x^p}$, où p est le plus entier tel que $p \geq 2$ et $\alpha_p \neq 0$.