CHAP 8 - CALCUL MATRICIEL - SYSTEMES LINEAIRES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1 Calcul matriciel

1.1 Notion de matrice

Définition 1
On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans** $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et p colonnes de nombres de $\mathbb{K}$ présenté sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Cette matrice se note également $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, ou plus simplement (a_{ij}) quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le **format** (n, p).
- Si $p = 1$, A est appelée **matrice colonne**.
- si $n = 1$, A est appelée **matrice ligne**.
- si $n = p$, A est appelée **matrice carrée d'ordre** n. La éléments a_{ii} (pour $i \in [\![1, n]\!]$) sont alors appelés **éléments diagonaux**, et $(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ est appelée **diagonale** de A.

Notations
- On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note 0_{np} (resp. 0_n) la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 2
On appelle **matrice identité** d'ordre n, notée I_n, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les **symboles de Kronecker** (δ_{ij}) tels que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Définition 3
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que A est **diagonale** si

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, (i \neq j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$$

  On note $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ une telle matrice.
- On dit que A est une matrice **triangulaire supérieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, (i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$$

- On dit que A est une matrice **triangulaire inférieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, (i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$$

1.2 Opérations sur les matrices

Définition 4
On appelle **addition** dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la loi notée $+$ définie par : $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Remarque 1
Pour l'addition, deux matrices doivent être de même format.

Définition 5
On appelle **multiplication par un scalaire** la loi notée $\cdot$ définie par : $\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

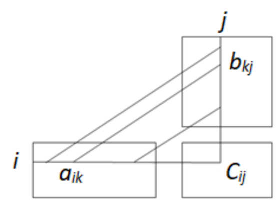
Proposition 1
Soient A, B et C de matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (on dit que l'addition est **associative**)
- $A + B = B + A$ (on dit que l'addition est **commutative**)
- $A + 0_{np} = A$ (0_{np} est appelé **élément neutre** de l'addition)
- $A + (-A) = 0_{np}$ ($-A$ est appelé le **symétrique** de A pour l'addition)
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (on dit que la multiplication par un scalaire est **associative**)
- $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (on dit que la multiplication par un scalaire est **distributive** sur l'addition)

Définition 6
On appelle **matrice élémentaire** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf un qui vaut 1. Lorsque ce coefficient est à la k-ème ligne et h-ème colonne, on note la matrice E_{kh}.
On a donc $\mathrm{E}_{kh} = (\delta_{ik}\delta_{j_h})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

Remarque 2
Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$, on a : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\mathrm{E}ij$

Définition 7
Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le q}} \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le q \\ 1 \le j \le p}} \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbb{K})$.
On appelle **produit** de A par B et on note AB la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$$



Attention ! Le produit AB ne peut être réalisé que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Remarque 3
La i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B et la j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B.

Proposition 2
- $\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC)$
- $\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B + C) = AB + AC$
- $\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K}),\ (B + C)A = BA + CA$
- $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K},\ A(\lambda B) = \lambda(AB)$
- $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A$ et $0_n A = A 0_n = 0_n$

Proposition 3
Pour $i \in [\![1, n]\!], (j, k) \in [\![1, p]\!]^2$ et $l \in [\![1, q]\!]$ on a :

$$\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathrm{E}_{il}$$

Proposition 4 Formule du binôme de Newton
Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

1.3 Transposition

Définition 8
On appelle **transposée** de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $A^T = (a'_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$.

Définition 9
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que A est **symétrique** si $A^T = A$.
  On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
- On dit que A est **antisymétrique** si $A^T = -A$.
  On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 5
$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a :
- $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.4 Matrices inversibles

Définition 10
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n$.
L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est appelé **groupe linéaire d'ordre** n, et se note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 6
Si A et B sont des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 7
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Proposition 8
Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.
Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}\right)$.
Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.
De plus, l'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Définition 11
On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ un système de la forme

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

où les coefficients a_{ij} et b_i $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Résoudre le système $\mathscr{S}$, c'est chercher l'ensemble des p-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ qui vérifient toutes les égalités. Ces p-uplet sont appelés **solutions du système**.

Définition 12
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
A est appelée la **matrice du système $\mathscr{S}$** ; B est appelé **second membre** du système.
La matrice notée $(A|B)$ est appelée **matrice augmentée du système**.

Remarque 4
$(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $\mathscr{S}$ si, et seulement si $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Cette égalité s'appelle **interprétation matricielle de $\mathscr{S}$**.

Définition 13
Si $B = 0_{n1}$, on dit que le système est **homogène**.
Etant donné un système $\mathscr{S}$ d'interprétation matricielle $AX = B$, le système homogène d'interprétation matricielle $AX = 0_{n,1}$ est appelé **système homogène associé** à $\mathscr{S}$.

Définition 14
Un système linéaire est dit **de Cramer** si la matrice associée est inversible.

Proposition 9
Un système de Cramer admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Remarque 5
Un système de Cramer homogène admet pour unique solution $(0, \cdots, 0)$.

2.2 Systèmes équivalents

Définition 15
On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système, ou d'une matrice :
- la permutation (ou l'échange) de deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- le produit d'une ligne par un nombre non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- l'addition à une ligne d'une autre ligne multipliée par un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarque 6
On définit de même des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Définition 16
Deux systèmes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont dits **équivalents** si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $\mathscr{S} \sim \mathscr{S}'$.
Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes** si l'on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim A'$.

Définition 17
On appelle **matrice de transposition** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice P_{ij} de la forme :
$P_{ij} = \mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & i & & j & & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
& & 1 \\
& & & 0 & \cdots & 1 \\
& & & \vdots & \ddots & \vdots \\
& & & 1 & \cdots & 0 \\
& & & & & & 1 \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Proposition 10
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $P_{ij}A$ se déduit de A en échangeant les lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Proposition 11
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice P_{ij} est inversible, d'inverse elle même.

Définition 18
On appelle **matrice d'affinité** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice $D_i(\lambda)$ de la forme :
$D_i(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)\mathrm{E}_{ii}$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \lambda & & & \\
& 0 & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Proposition 12
$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $D_i(\lambda)A$ se déduit de A en multipliant la ligne L_i par λ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).

Proposition 13
$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $D_i(\lambda)$ est inversible, d'inverse $D_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Définition 19
On appelle **matrice de transvection** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice $T_{ij}(\lambda)$ de la forme :
$T_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & j & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & \lambda & & \\
& & & & \\
& 0 & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Proposition 14
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice $T_{ij}(\lambda)A$ se déduit de A en ajoutant à la i-ème ligne le produit de la j-ème ligne par λ ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

Proposition 15
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $T_{ij}(\lambda)$ est inversible, d'inverse $T_{ij}(-\lambda)$.

Remarque 7
Toute opération élémentaire sur une matrice correspond à la multiplication à gauche de cette matrice par une matrice carrée inversible.

Théorème 1
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

2.3 Matrice échelonnée

Définition 20
On appelle **matrice échelonnée en lignes** toute matrice telle que :
⇝ Si une ligne est entièrement nulle, les suivantes le sont aussi.
⇝ Si le premier coefficient non nul d'une ligne est à la j-ème colonne, alors soit la ligne suivante est nulle, soit son premier coefficient non nul est dans une colonne k telle que $k > j$.
On appelle **pivot** d'une matrice échelonnée le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
On appelle **système échelonné** tout système dont la matrice est échelonnée en lignes.
Une matrice échelonnée est dite **échelonnée réduite en lignes** lorsque tous les pivots sont égaux à 1, et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.
On appelle **système échelonné réduit** tout système dont la matrice associée est échelonnée réduite en lignes.

Exemple 1
(a) Matrices échelonnées, la dernière étant échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Matrice non échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 2
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite.

Définition 21
On appelle **rang d'une matrice** le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente.
On appelle **rang d'un système** le rang de la matrice associée.

Remarque 8
Le rang d'un système ne dépend pas du second membre.

2.4 Algorithme du pivot de Gauss

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues.
(1) On se ramène à un système équivalent tel que $a_{11} \neq 0$, en permutant éventuellement L_1 avec une autre ligne, puis on divise L_1 (la nouvelle première ligne) par a_{11} (le nouveau premier terme).
(2) Pour $i \in [\![2,,n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$. On élimine ainsi l'inconnue x_1 dans toutes les équations à partir de la deuxième. On obtient un nouveau système, équivalent au premier de la forme :

$$\begin{cases} x_1 + & a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1p}x_p = b'_1 \\ & a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ & \vdots \\ & a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{np}x_p = b'_n \end{cases}$$

On considère désormais le système de $n-1$ équations formé par les lignes L_2 à L_n et on lui applique les étapes (1) et (2) précédentes, jusqu'à obtenir un système échelonné.

2.5 Ensemble des solutions

On considère un système linéaire $\mathscr{S}$ de n équations à p inconnues et de rang r.
On se ramène au cas où le système est échelonné et, quitte à changer l'ordre des inconnues, on suppose que le nombre de 0 qui commencent chaque ligne augmente de 1 à chaque ligne.
On suppose également que chaque pivot vaut 1.

On note $A = (a_{ij})$ la matrice échelonnée associée au système, et $B = (b_i)$ la matrice second membre.

2.5.1 Si $r = n = p$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ & x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = b_n \end{cases}$

Ce système est un système de Cramer, il possède une unique solution obtenue en réduisant la matrice augmentée associée.

2.5.2 Si $r = n < p$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n + \displaystyle\sum_{j=n+1}^{p} a_{1j}x_j = b_1 \\ & x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n + \displaystyle\sum_{j=n+1}^{p} a_{2j}x_j = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n + \displaystyle\sum_{j=n+1}^{p} a_{nj}x_j = b_n \end{cases}$

Ce système admet une infinité de solutions.
En réduisant la matrice augmentée associée, on exprime les inconnues $x_1, \cdots, x_n$, appelées **inconnues principales**, à l'aide des inconnues $x_{n+1}, \cdots, x_p$, appelées **inconnues non principales** ou **inconnues secondaires**.

Remarque 9
Le nombre d'inconnues non principales est égal au nombre d'inconnues moins le rang.

2.5.3 Si $r = p < n$

Le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_p & = & b_p \\ & & & 0 & = & b_{p+1} \\ & & & & \vdots & \\ & & & 0 & = & b_n \end{array}\right.$

Définition 22
Le équations $0 = b_i$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$ s'appellent **équations de compatibilité**.

⇝ Si $b_i = 0$ pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$ alors le système admet une unique solution, obtenue en réduisant la matrice augmentée. On dit que le système est **compatible**.

⇝ Sinon, le système n'admet pas de solution.

2.5.4 Si $r < p$ et $r < n$

Le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1r}x_r + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{p} a_{1j}x_j & = & b_1 \\ & x_2+ & \cdots & +a_{2r}x_r + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{p} a_{2j}x_j & = & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_r + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{p} a_{rj}x_j & = & b_r \\ & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & \vdots & \\ & & & 0 & = & b_n \end{array}\right.$

⇝ Si $b_i = 0$ pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, le système admet une infinité de solutions, dont les inconnues principales $x_1, \cdots, x_r$ s'obtiennent en fonction des inconnues non principales $x_{r+1}, \cdots, x_n$ en réduisant la matrice augmentée. Le système est alors **compatible**.

⇝ Sinon le système n'a pas de solution.

2.5.5 Bilan

Proposition 16
Un système linéaire de n équations à p inconnues de rang r admet 0, 1 ou une infinité de solutions. S'il admet une infinité de solutions, celles-ci dépendent de $p - r$ paramètres (donnés par les inconnues non principales).

Proposition 17
Un système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition 18
L'ensemble des solutions d'un système $\mathscr{S}$ est soit vide, soit de la forme $X_0 + \mathscr{S}_H$ où X_0 est une solution particulière du système et $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des solutions du système homogène associé.

2.6 Inverse d'une matrice

Proposition 19
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
(ii) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.
(iii) $A \sim \mathrm{I}_n$
(iv) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système $AX = B$ admet une unique solution.

Inversion d'une matrice par résolution d'un système linéaire

Pour inverser une matrice A, on résout le système $AX = Y$ où Y est un vecteur colonne quelconque. On obtient alors X en fonction de Y sous la forme $X = BY$, où $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'inverse de A.

Inverse d'une matrice par le pivot de Gauss

D'après la proposition précédente, une matrice inversible est équivalente à la matrice I_n. On peut donc passer de l'une à l'autre en une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. En faisant les mêmes opérations simultanément sur A et I_n, on obtient A^{-1} à la place de I_n lorsque l'on a obtenu I_n à la place de A.