Chap 7 - CONTINUITE - DERIVABILITE

Dans ce chapitre, sauf exception, f désigne une fonction réelle définie sur un ensemble D qui est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, ou une réunion de tels intervalles.
On notera $\overline{D}$ l'ensemble D auquel on ajoute les bornes des intervalles qui le définissent, éventuellement $+\infty$ et $-\infty$.
On dira que f est définie **au voisinage** de a si $a \in \overline{D}$, fini ou infini.
On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage** de a si elle est vérifiée pour tous les réels de l'intersection de D avec un intervalle centré en a lorsque a est un réel, avec un intervalle de la forme $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, ou un intervalle de la forme $]-\infty, A]$ si $a=-\infty$.

1 Limites de fonctions - Continuité

1.1 Limite finie

Définition 1
Soit $l \in \mathbb{R}$

- Soit $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. On dit que f **admet** l **pour limite** en a si on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ (|x-a| \leq r) \Rightarrow (|f(x)-l| \leq \varepsilon)$$

  On note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

- Si f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que f **admet** l **pour limite** en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ (x \geq A\ (\text{resp. } x \leq A)) \Rightarrow (|f(x)-l| \leq \varepsilon)$$

  On note $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$ (resp. $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$).

Proposition 1
Soit $a \in \overline{D}$. Si f admet une limite en a, alors elle est unique. On la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ou $\lim\limits_{a} f$.

Remarque 1
Si $a \in D$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $l = f(a)$.

Proposition 2
Si f admet un limite en $a \in \overline{D}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Définition 2
Soit $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$.

- On dit que f admet l pour **limite à droite** en a si $f|_{]a,+\infty[\cap D}$ a pour limite l en a.
  Si elle existe, elle est unique ; on la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
- On dit que f admet l pour **limite à gauche** en a si $f|_{]-\infty,a[\cap D}$ a pour limite l en a.
  Si elle existe, elle est unique ; on la note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Proposition 3
Soient $l \in \mathbb{R}, a \in \overline{D}$ tel que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existent. Alors :

- Si $a \in D$, $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = l\right)$.
- Si $a \notin D$, $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l\right)$.

Théorème 1 Caractérisation séquentielle de la limite
f admet une limite l en $a \in \overline{D}$, si et seulement si pour toute suite (x_n) de D qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.

Définition 3
S'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$), on dit que la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est **horizontale**, sinon on dit quelle est **oblique**.

1.2 Limite infinie

Définition 4
- Si f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que f **admet pour limite** $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si on a :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D, (x \geq A \text{ (resp. } x \leq A)) \Rightarrow (f(x) \geq M)$$

  On note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
- Si f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que f **admet pour limite** $-\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $-f$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
  On note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (resp. $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$)
- Si $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ et $a \notin D$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si on a :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ (|x - a| \leq r) \Rightarrow (f(x) \geq M \text{ (resp. } f(x) \leq M))$$

  On note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Proposition 4
Soit $a \in \overline{D}$. Si f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en a, alors elle n'y admet pas d'autre limite, finie ou infinie.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$).

Remarque 2
On définit comme dans le cas des limites finies la limite infinie à gauche ou à droite de $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$.

Définition 5
Soit $a \in \overline{D}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ on dit que la courbe de f admet la droite d'équation $x = a$ pour **asymptote verticale en** a.

1.3 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur D et admettant respectivement l et l' comme limites (finies ou infinies) en $a \in \overline{D}$.

Proposition 5 Somme
$\leadsto$ Si l et l' sont des réels, alors $f + g$ admet $l + l'$ pour limite en a.
$\leadsto$ Si l est $\pm\infty$ et l' est réel, alors $f + g$ admet $\pm\infty$ pour limite en a.
$\leadsto$ Si l et l' sont $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $f + g$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en a.
$\leadsto$ Si l et l' sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de $f + g$.
On dit que l'on a une **forme indéterminée**.

Proposition 6 Produit

$\rightsquigarrow$ Si l et l' sont des réels, alors la fg admet ll' pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l est $+\infty$ et l' est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors fg admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l est $-\infty$ et l' est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors fg admet $-\infty$ (resp. $+\infty$) pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l et l' sont tous les deux $+\infty$ ou tous les deux $-\infty$, alors fg admet $+\infty$ pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l et l' sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$, alors fg admet $-\infty$ pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l'une des limites est infinie et l'autre est nulle, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de fg. On a une **forme indéterminée**.

Proposition 7 Inverse

On suppose que la fonction f ne s'annule pas au voisinage de a.

$\rightsquigarrow$ Si l est un réel non nul, alors $\dfrac{1}{f}$ admet $\dfrac{1}{l}$ pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si l est $+\infty$ ou $-\infty$, alors la $\dfrac{1}{l}$ admet 0 pour limite en a.

$\rightsquigarrow$ Si $l = 0$, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de $\dfrac{1}{f}$. On a une **forme indéterminée**.

Théorème 2

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Soient f une fonction définie au voisinage de a et g une fonction telle que $g \circ f$ soit définie au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Proposition 8

Soient f et g définies au voisinage de a réel, ou infini. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

1.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 3

Soient f et g des fonctions telles que $f \leq g$ au voisinage de a, fini ou infini.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$ alors $l \leq l'$.
  On dit que **l'inégalité est conservée par passage à la limite**.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque 3

Si au voisinage de a on a $f < g$ avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, on peut avoir $l = l'$.

Exemple 1

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x > 0, f(x) < g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Théorème 4 Théorème d'encadrement

Soient f, g et h trois fonctions telles que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a, fini ou infini.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Théorème 5 Théorème de la limite monotone
Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ (a et b étant éventuellement infinis). Alors :
- f admet une limite en b et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\{f(x), x \in]a, b[\}$.
- f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x), x \in]a, b[\}$.
- Si $c \in]a, b[$, alors f admet une limite à droite et à gauche de c et $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Remarque 4
(a) Sous les mêmes hypothèses, si f est majorée (resp. minorée) sur $]a, b[$ alors sa limite en b (resp. en a) est finie, sinon elle vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(b) Si f est décroissante sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\{f(x), x \in]a, b[\}$, cette limite étant finie si f est minorée, valant $-\infty$ sinon, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x), x \in]a, b[\}$, cette limite étant finie si f est majorée, valant $+\infty$ sinon.

1.5 Continuité

Définition 6
Une fonction définie sur D est dite **continue en** $a \in D$ si elle admet une limite en a.
Elle est dite **continue sur** D, ou simplement **continue**, si elle est continue en tout point de D.
On note $C^0(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

Définition 7
Soit $a \notin D$, tel que $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. Si f admet une limite finie l en a, on dit que f est **prolongeable par continuité** en a. Dans ce cas, la fonction g définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$ et $g(a) = l$ est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Proposition 9
Si f et g sont des fonctions continues en a alors :
- Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- La fonction fg est continue en a.
- Si $g(a) \neq 0$ la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 10
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Théorème 6 Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire que pour tout $(a, b) \in I^2$, tous les réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admettent un antécédent par f.

Théorème 7
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment, c'est-à-dire que toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 8 Théorème de bijection
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle établit une bijection entre I et $f(I)$.

Théorème 9
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

1.6 Extension aux fonctions complexes

Définition 8
Une fonction complexe définie sur D **admet une limite en** $a \in \overline{D}$ si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent une limite en a.
Si $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = x_0$ et $\lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = y_0$, on dira alors que le nombre complexe $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ est la limite de f en a.
On note encore $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_a f$ cette limite.

Définition 9
Une fonction complexe définie sur D est dite **continue** en $a \in D$ si elle y admet une limite.

Remarque 5
Les propriétés de conservation de la continuité par somme, produit ou quotient sont toujours vérifiées pour les fonctions à valeurs complexes.

2 Dérivation

2.1 Définitions

Définition 10
Soit $a \in D$.

- On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement en a défini pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in D$ par $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.
  Lorsque cette limite existe, on l'appelle **nombre dérivé** de f en a, et on la note $f'(a)$.
  On a donc, lorsqu'elle existe :
  $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- On dit que f est **dérivable à droite** de a si le taux d'accroissement admet une limite finie à droite de 0. Lorsqu'elle existe cette limite est appelée **nombre dérivé de f à droite de** a ; on la note $f'_d(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- On dit que f est **dérivable à gauche** de a si le taux d'accroissement admet une limite finie à gauche de 0. Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée **nombre dérivé de f à gauche de** a ; on la note $f'_g(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 6
Si f dérivable est en a on a : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Proposition 11
f est dérivable en $a \in D$ si, et seulement si il existe un réel L et une fonction ε tels que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in D$ on a : $f(a+h) = f(a) + Lh + h\varepsilon(h)$

Définition 11
Dans la proposition précédente, on a $L = f'(a)$. L'expression

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

s'appelle **le développement limité à l'ordre 1 de f en** a.

Définition 12
Si f est dérivable en tout réel de D, on dit qu'elle est **dérivable** sur D et on définit la **fonction dérivée** de f sur D qui à tout réel $x \in D$ associe le nombre dérivé de f en x : $x \mapsto f'(x)$.
On la note f' ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation différentielle).

Définition 13
Soient $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère, et $a \in D$.
- Si f est dérivable en a, la droite T passant par le point $A(a, f(a))$ de $\mathscr{C}$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la **tangente** à $\mathscr{C}$ en A. Son équation est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) de a, la droite T passant par le point $A(a, f(a))$ de $\mathscr{C}$ et de coefficient directeur $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) est appelée la **demi-tangente à droite** (resp. demi-tangente à gauche).
- Si $\lim\limits_{h\to 0} \left| \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = +\infty$ on dit que $\mathscr{C}$ admet en A une tangente verticale.

Définition 14
Soit f une fonction complexe définie sur D. On dit que f est **dérivable** en $a \in D$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
On note alors $f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}(f))'(a)$ appelé **nombre dérivé** de f en a.
On dit que f est **dérivable** sur D si f est dérivable en tout réel de D, et on définit dans ce cas la fonction dérivée de f, notée f' telle que $\mathrm{Re}(f')=(\mathrm{Re}(f))'$ et $\mathrm{Im}(f')=(\mathrm{Im}(f))'$

2.2 Propriétés

Proposition 12
Si f est dérivable en $a \in D$, alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est fausse.

Proposition 13
Soient f et g des fonctions réelles ou complexes dérivables sur D. Alors :
- Pour tous réels λ et μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- La fonction fg est dérivable sur D et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si f ne s'annule pas sur D, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur D et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur D, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Proposition 14 Composition
Si f est dérivable sur D et si g est dérivable sur $f(D)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur D et on a :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Théorème 10 Dérivée d'une fonction réciproque
Soient f une fonction continue, strictement monotone sur I telle que $f(I) = J$, et $a \in I$.
Si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

2.3 Dérivées successives

Définition 15
Soit f une fonction dérivable sur D. Si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur D, on dit que f est **deux fois dérivable** sur D, et on note f'' la dérivée de sa dérivée, appelée **dérivée seconde** de f.
Par récurrence, on peut ainsi définir, lorsqu'elle existe, la **dérivée n-ème** de f comme la dérivée de sa dérivée $(n-1)$-ème. Lorsqu'elle existe, on dit que f est n fois dérivable sur D et on note alors sa dérivée n-ème $f^{(n)}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ (notation différentielle).
On dit que f est **indéfiniment dérivable** lorsqu'elle admet une dérivée n-ème pour tout entier n.

Exemple 2
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x on a :
(a) $(\exp)^{(p)}(x) = \exp(x)$
(b) $(\sin)^{(p)}(x) = \sin\left(x + p\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $(\cos)^{(p)}(x) = \cos\left(x + p\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Proposition 15
Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions n fois dérivables sur D. La fonction $f+g$ est n fois dérivable sur D et on a :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

Proposition 16 Formule de Leibniz
Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions n fois dérivables sur D. La fonction fg est n fois dérivable sur D et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Définition 16
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe** C^n sur D, et on note $f \in C^n(D, \mathbb{R})$ si f est n fois dérivable sur D et que sa dérivée n-ème est continue sur D.
On dit que f est **de classe** C^∞ sur D, et on note $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 17
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. La somme, le produit, le quotient (s'il existe) de fonctions de classes C^n sur D sont de classe C^n sur D.

Proposition 18
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si $f \in C^n(D, \mathbb{R})$ et $g \in C^n(f(D), \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in C^n(D, \mathbb{R})$.

3 Théorèmes fondamentaux

3.1 Extremum local

Définition 17
Soit $a \in D$. f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a si au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Définition 18
Soit f une fonction dérivable sur D. On appelle **point critique** de f tout réel $a \in D$ tel que $f'(a) = 0$.

Théorème 11
Soient $a \in D$, $\underline{a \text{ n'étant pas une borne de } D}$, et f une fonction dérivable sur D.
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

Attention ! La réciproque est fausse.

Exemple 3
La fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$, pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Remarque 7
Si a est une borne de D le théorème ne s'applique pas.

Exemple 4
La fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x^2$ admet un maximum en 2 où la dérivée ne s'annule pas.

3.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 12 Théorème de Rolle
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 13 Théorème des accroissements finis
Etant donnée une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Théorème 14 Inégalité des accroissements finis
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'|$ est majorée par un réel K alors on a :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

3.3 Dérivées et variations

Théorème 15
Soit I un intervalle. On note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle I privé de ses bornes. Alors :

- f est constante si, et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- f est croissante (resp. décroissante) si, et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$.
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si, et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$ et f' ne s'annule qu'en des points isolés.

3.4 Prolongement de la dérivée

Théorème 16
Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite finie en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.