CHAP 6 - SUITES NUMERIQUES

1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Définition 1
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit que M est une **borne supérieur** de A si

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

- On dit que m est une **borne inférieure** de A si

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Proposition 1
- Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, elle est unique ; A est alors majorée, et sa borne supérieure est le plus petit des majorants, noté $\sup(A)$.
- Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, elle est unique. A est alors minoré et sa borne inférieure est le plus grand des minorants, noté $\inf(A)$.

Théorème 1
Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Remarque 1
Si A est une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$ on convient que $\sup(A) = +\infty$.

2 Généralités sur les suites

2.1 Définitions

Définition 2
Une suite réelle (resp. **suite complexe**) est une fonction u réelle (resp. complexe) définie sur une partie infinie D de $\mathbb{N}$.
On note $u(n) = u_n$, qui se lit "u indice n". On dit que u_n est le **terme général** de la suite, ou le **terme de rang** n. La suite elle même se note $(u_n)_{n\in D}$ ou (u_n) lorsque $D = \mathbb{N}$.

Il existe plusieurs modes de définition d'une suite notamment :

✓ <u>**Forme explicite**</u> :
Une suite est définie **explicitement** lorsque son terme général est exprimé en fonction de n
Exemple 1
$u_n = \dfrac{n}{1+n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

✓ <u>**Forme récurrente**</u> :
Une suite est définie **par récurrence** lorsque l'on donne son (ou ses) premier(s) terme(s) et que l'on exprime un terme général à l'aide de termes de rangs inférieurs. Cette expression s'appelle **relation de récurrence**.
Exemple 2
(a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n^2 + 1, \forall n \geq 0 \end{cases}$ qui s'écrit aussi : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = (n-1)u_{n-1}^2 + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \forall n \geq 0 \end{cases}$ qui s'écrit aussi : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$

Définition 3
On dit qu'une suite réelle est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un réel M supérieur (resp. inférieur) à tous les termes de la suite.
Une suite qui est majorée et minorée est dite **bornée**.

Remarque 2
Une suite réelle $(u_n)_{n\in D}$ est bornée, si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in D}$ est majorée.

Définition 4
Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une **suite extraite** de (u_n) (également appelée **sous-suite**), s'il existe une application φ définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que pour tout $n, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 3
Lorsque $\varphi : n \mapsto 2n$, la suite extraite (u_{2n}) est la suite extraite de (u_n) des termes de rangs pairs.

2.2 Exemples de suites récurrentes

2.2.1 Suites arithmétiques

Définition 5
Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre r, appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 2
(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_{n_0} si, et seulement si

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

Proposition 3
Si $(u_n)_{n\in D}$ est une suite arithmétique, alors pour tout $(n_0, n) \in D^2$ tel que $n \geq n_0$ on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1)\frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

Exemple 4
$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Suites géométriques

Définition 6
Une suite (u_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre q, appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q\, u_n$$

Proposition 4
(u_n) est une suite géométrique de raison q et de terme initial u_{n_0} si, et seulement si

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

Proposition 5
Si $(u_n)_{n\in D}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour $(n_0, n) \in D^2$ tel que $n \geq n_0$ on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0}\frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}$$

2.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 7
Une suite (u_n) est dite **suite arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Proposition 6
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.
Si l est tel que $l = al + b$, alors la suite $(u_n - l)$ est une suite géométrique de raison a.

2.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8
Une suite (u_n) est dite **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle **équation caractéristique** associée l'équation

$$r^2 = ar + b$$

Proposition 7
Soit (u_n) une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique (EC) : $r^2 = ar + b$.

$\rightsquigarrow$ Si (EC) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

$\rightsquigarrow$ Si (EC) admet une unique solution réelle r_0, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r_0^n$$

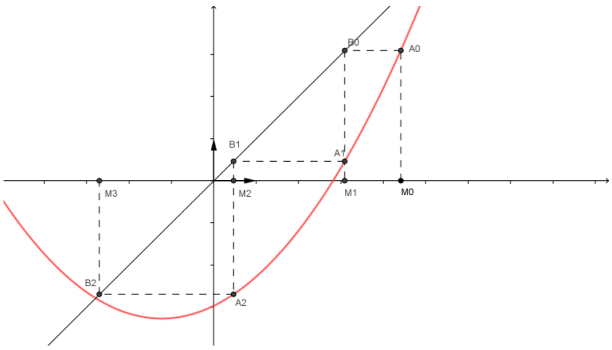
$\rightsquigarrow$ Si (EC) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n \left(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)\right)$$

2.3 Représentation graphique d'une suite

- Pour **représenter** une suite réelle $(u_n)_{n \in D}$, on place dans un repère les points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in D$.
  On obtient ainsi un **nuage de points**.

- Pour **construire** une suite récurrente (u_n) définie par son terme initial et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:
  $\rightsquigarrow$ On trace dans un repère la courbe C_f représentative de f et la droite Δ d'équation $y = x$.
  $\rightsquigarrow$ On place le point $M_0(u_0, 0)$, puis on place sur C_f le point A_0 d'abscisse u_0 (ses coordonnées sont (u_0, u_1) car $f(u_0) = u_1$) ;
  $\rightsquigarrow$ On place le point B_0 de Δ ayant la même ordonnée que A_0 (ses coordonnées sont donc (u_1, u_1)) ;
  $\rightsquigarrow$ On projette B_0 sur l'axe des abscisses on obtient le point $M_1(u_1, 0)$;
  $\rightsquigarrow$ On réitère le procédé précédent en partant de M_1 pour obtenir $M_2(u_2, 0)$ et ainsi de suite.
  On obtient ainsi des points sur l'axe des abscisses dont les abscisses sont les termes de la suite.



2.4 Variations

2.4.1 Définitions

Définition 9
On dit qu'une suite (u_n) est :

- **stationnaire**, si

$$\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n = u_{n_0})$$

- **croissante** (resp. **décroissante**), si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \quad \text{(resp. } u_{n+1} \leq u_n\text{)}$$

- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n \quad \text{(resp. } u_{n+1} < u_n\text{)}$$

- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

2.4.2 Techniques pour étudier les variations d'une suite

(a) Si la suite est définie explicitement à l'aide d'une fonction f, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

(b) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(c) Si les termes de la suite sont strictement positifs, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Proposition 8
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est **stable** par f), et (u_n) une suite définie par son terme initial $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone et on a :
$\rightsquigarrow$ (u_n) croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$;
$\rightsquigarrow$ (u_n) décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$;

Remarque 3
Si f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont.

3 Limite d'une suite

3.1 Définitions

Définition 10
On dit qu'une suite réelle (u_n) a pour **limite** le réel l, ou que la suite (u_n) **converge** vers l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon)$$

Toute suite qui admet une limite réelle est dite **convergente** ; toute suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Proposition 9
Si (u_n) converge vers un réel l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.

Remarque 4
La réciproque est fausse.

Définition 11
On dit qu'une suite complexe (u_n) est convergente, si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ le sont.
Si $(\mathrm{Re}(u_n))$ admet pour limite x et $(\mathrm{Im}(u_n))$ admet pour limite y alors on dit que (u_n) admet pour limite $x + \mathrm{i}y$.

Définition 12
On dit qu'une suite réelle (u_n) **a pour limite** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \geq A)$$

On dit qu'une suite réelle (u_n) **a pour limite** $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.

Remarque 5
(a) Une suite qui a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.
(b) Si une suite a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$), elle n'est pas majorée (resp. minorée).

3.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 10
Si une suite réelle admet une limite, finie ou infinie, cette limite est unique.
On la note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Remarque 6
Si une suite complexe admet une limite, alors elle est unique.

Proposition 11
Toute suite convergente est bornée.

Proposition 12
Si (u_n) converge vers $l > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n > 0$.

Proposition 13
Si (u_n) a pour limite l (réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$) alors toute suite extraite a pour limite l.

Remarque 7
La contraposée de cette propriété peut-être utilisée pour montrer qu'une suite diverge.

3.3 Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers u et v (u et v pouvant désigner un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

Proposition 14 Somme
⇝ Si u et v sont des réels, alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$.
⇝ Si u est $\pm\infty$ et v est réel, alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\pm\infty$.
⇝ Si u et v sont $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
⇝ Si u et v sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$, alors on ne peut rien en dédire pour la limite de (u_n+v_n). On parle alors de **forme indéterminée**.

Proposition 15 Produit
⇝ Si u et v sont des réels, alors la suite (u_nv_n) converge vers uv.
⇝ Si u est $+\infty$ et v est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors la suite (u_nv_n) converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
⇝ Si u est $-\infty$ et v est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors la suite (u_nv_n) converge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).
⇝ Si u et v sont tous les deux $+\infty$ ou tous les deux $-\infty$, alors la suite (u_nv_n) converge vers $+\infty$.
⇝ Si u et v sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$, alors la suite (u_nv_n) converge vers $-\infty$.
⇝ Si l'une des limites est infinie et l'autre est nulle, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de (u_nv_n). On a une **forme indéterminée**.

Proposition 16 Inverse
On suppose que la suite (u_n) ne s'annule pas.
⇝ Si u est un réel non nul, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{u}$.
⇝ Si u est $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.
⇝ Si $u = 0$, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$. On a une **forme indéterminée**.

3.4 Théorèmes de comparaison

Proposition 17
Soient (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers u et v .
S'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ alors $u \leq v$.

Corollaire
Si une suite positive converge, sa limite est positive ou nulle.

Remarque 8
On ne peut pas améliorer le résultat en utilisant une inégalité stricte :
si pour $n \geq n_0, u_n < v_n$ on a toujours $u \leq v$, mais on peut avoir $u = v$.
Par exemple, pour tout $n > 0, \dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
On dit que l'inégalité stricte n'est pas conservée par passage à la limite.

Proposition 18
Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ alors :
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 19
Une suite géométrique de raison q converge si, et seulement si $q \in]-1,1]$.
Si $q = 1$ la suite est constante, si $|q| < 1$ la limite est 0.

Théorème 2 Théorème d'encadrement
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si (u_n) et (w_n) admettent la même limite l alors (v_n) converge vers l.

3.5 Théorèmes de convergence

Théorème 3 Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite croissante.
- Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$

Corollaire
Soit (u_n) une suite décroissante.
- Si (u_n) est minorée, alors elle converge vers $l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Théorème 4 Théorème du point fixe
Soient f une fonction définie sur un intervalle I stable par f et (u_n) une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.

Définition 13
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 5 Théorème des suites adjacentes
Deux suites adjacentes sont convergentes, et admettent la même limite.