Chap 5 - PRIMITIVES - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Calcul de primitives

1.1 Définition et existence

Définition 1
Une fonction F définie sur I est une **primitive** de f sur I si

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Théorème 1
Si f est continue sur un intervalle I, alors :
- f admet des primitives sur I.
- Deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Corollaire
On suppose que f est continue sur I. Soit $a \in I$.
- f admet une unique primitive qui s'annule en a. On la note :

$$\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

- Pour toute primitive F de f sur $I = [a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notation
On notera $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive quelconque de f sur I.

1.2 Propriétés

Proposition 1 Relation de Chasles
Si f est continue sur $I = [a, b]$, alors pour tout $c \in [a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 2 Linéarité
Si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 2 Intégration par parties
Soient u et v des fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 3 Changement de variable
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi$ une fonction réelle de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$, strictement monotone et f une fonction continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$. On a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$$

Corollaire

- Si f est continue sur I contenant les réels a et $-a$, et si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.
- Si f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel a, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t$.

1.3 Exemples

Sur un intervalle adapté, si a désigne un réel strictement positif on a :

$$\int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}^{te}, \qquad \int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}^{te}$$

2 Équations différentielles linéaires

2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans l'ensemble de ce paragraphe, a, b et c désignent des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur un intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.

2.1.1 Définition

Définition 2
On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad (L)$$

On appelle **équation différentielle homogène associée** l'équation :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \quad (H)$$

Une **solution** φ de (L) sur I est une fonction définie sur I qui vérifie pour tout $x \in I$:
$a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x)$.
On notera S_L l'ensemble des solutions de (L) et S_H l'ensemble des solutions de (H).

2.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 4
L'ensemble S_H des solutions de (H) sur I est :

$$S_H = \left\{ \varphi : I \to \mathbb{K}, \forall x \in I, \varphi(x) = C\mathrm{e}^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t}, \quad C \in \mathbb{K} \right\}$$

Théorème 5
Une solution de (L) est la somme d'une solution particulière de (L) et d'une solution de (H).

Remarque 1
Résoudre (L) revient donc à trouver S_H en calculant $\displaystyle\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t$ et à trouver une solution particulière de (L).

Définition 3
On appelle **problème de Cauchy du premier ordre** un système de la forme :

$$\begin{cases} a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{où } x_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{K}$$

Théorème 6 Théorème de Cauchy
Tout problème de Cauchy admet une unique solution sur I.

2.1.3 Recherche de solutions particulières

Proposition 3 Superposition des solutions
On suppose que $c = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ où, pour tout $k \in [\![1, n]\!], c_k$ est une fonction continue sur I.
Si pour tout $k \in [\![1, n]\!], \varphi_k$ est une solution de l'équation différentielle $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_k(x)$, alors la fonction $\varphi = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ est une solution de (L).

Lorsqu'aucune solution évidente de (L) n'apparaît, on dispose d'une méthode pour trouver une solution particulière, appelée **méthode de variation de la constante**.
On note $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t}$ une solution de S_H.
On cherche alors une solution particulière de (L) sous la forme $y_p = \lambda h$ où λ désigne une fonction de classe C^1 sur I. On dérive y_p et on remplace y par y_p dans l'équation. On se ramène ainsi à une recherche de primitive.

2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans l'ensemble de ce paragraphe, a et b désignent des nombres de $\mathbb{K}$ et c une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.2.1 Définition

Définition 4
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x) \quad (L)$$

On appelle **équation différentielle homogène associée** l'équation :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (H)$$

Une **solution** φ de (L) sur I est une fonction définie sur I qui vérifie pour tout $x \in I$:
$\varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = c(x)$.
On notera S_L l'ensemble des solutions de (L) et S_H l'ensemble des solutions de (H).
L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (H).

2.2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 7
On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}, (A,B) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique admet une unique solution r_0, alors

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^{r_0 x}, (A,B) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

Théorème 8
On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique admet une unique solution r_0, alors

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^{r_0 x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Théorème 9
Une solution de (L) est la somme d'une solution particulière de (L) et d'une solution de (H).

Remarque 2
Résoudre (L) revient donc à trouver S_H en résolvant l'équation caractéristique et en appliquant l'un des théorèmes précédents, et à trouver une solution particulière de (L).

Définition 5
On appelle **problème de Cauchy du second ordre** un système de la forme :

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases} \qquad \text{où } x_0 \in I \text{ et } (y_0, z_0) \in \mathbb{K}^2$$

Théorème 10 Théorème de Cauchy
Tout problème de Cauchy admet une unique solution sur I.

2.2.3 Recherche de solutions particulières

Proposition 4 Superposition des solutions
On suppose que $c = \sum_{k=1}^{n} c_k$ où, pour tout $k \in [\![1,n]\!], c_k$ est une fonction continue sur I.
Si pour tout $k \in [\![1,n]\!], \varphi_k$ est une solution de l'équation différentielle $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c_k(x)$, alors la fonction $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ est une solution de (L).

Proposition 5 Si c est une fonction polynomiale de degré n :

- Si $b \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré n.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré $n+1$.

Proposition 6 Si c est une fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}P(x)$ où P est une fonction polynomiale de degré n :

- Si m n'est pas solution de l'équation caractéristique ($x \mapsto \mathrm{e}^{mx}$ n'est pas dans S_H), on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}Q(x)$ où Q est une fonction polynomiale de degré n.
- Si m est une solution simple de l'équation caractéristique ($x \mapsto \mathrm{e}^{mx}$ est dans S_H), on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}xQ(x)$ où Q est une fonction polynomiale de degré n.
- Si m est une solution double (l'unique solution) de l'équation caractéristique ($x \mapsto \mathrm{e}^{mx}$ et $x \mapsto x\mathrm{e}^{mx}$ sont dans S_H), on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}x^2Q(x)$ où Q est une fonction polynomiale de degré n.