CHAP 4 - GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

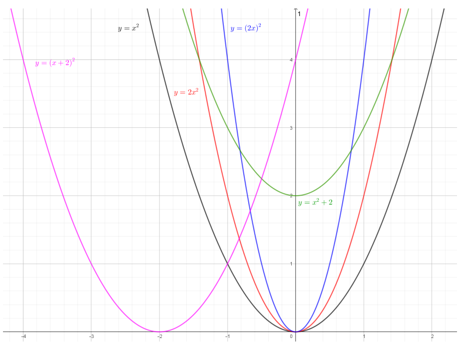
1.1 Transformations de courbes

On rappelle que l'on définit une fonction f sur un ensemble de réels D à valeurs dans $\mathbb{K}$ en associant à chaque réel de D un unique élément de $\mathbb{K}$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que f est une **fonction réelle** ; lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on dit que f est une **fonction complexe**.
On note $\mathscr{F}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1
Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle **représentation graphique** ou **courbe** d'une fonction réelle f définie sur D l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) telles que $x \in D$ et $y = f(x)$.

Proposition 1
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a désigne un réel non nul.

- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient en appliquant à $\mathscr{C}$ une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient en appliquant à $\mathscr{C}$ une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient en appliquant à $\mathscr{C}$ une symétrie d'axe $(O, \vec{i})$.
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto af(x)$ s'obtient (au compas) en multipliant les ordonnées des points de $\mathscr{C}$ par a. Cette transformation s'appelle **affinité de rapport a parallèlement à** (Oy).
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(ax)$ s'obtient (au compas) en divisant les abscisses des points de $\mathscr{C}$ par a. Cette transformation s'appelle **affinité de rapport $\dfrac{1}{a}$ parallèlement à** (Ox).



Proposition 2
Si f établit une bijection sur $\mathbb{R}$, la représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} est la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.2 Fonctions obtenues à partir d'une fonction complexe

Définition 2
Pour une fonction complexe f définie sur un ensemble D, on définit sur D les fonctions suivantes :

- $|f| : x \mapsto |f(x)|$, appelée **fonction module de** f ;
- $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$, appelée **fonction conjuguée de** f ;
- $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$, appelée **fonction partie réelle de** f ;
- $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$, appelée **fonction partie imaginaire de** f.

1.3 Propriétés

Définition 3
Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble D.

- On dit que f est **paire** si
$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(-x) = f(x)$$
- On dit que f est **impaire** si
$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x)$$
- On dit que f est **périodique** si
$$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, \quad x + T \in D, x - T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x)$$
Le réel T est appelé une **période** de f.

Remarque 1
(a) Si f est une fonction paire, alors sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet l'axe $(O, \vec{j})$ pour axe de symétrie.
On étudie donc une fonction paire sur les réels positifs de D, le reste se déduisant par symétrie.
(b) Si f est une fonction impaire, alors sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet le point O pour centre de symétrie.
On étudie donc une fonction impaire sur les réels positifs de D, le reste se déduisant par symétrie.
(c) Si f est une fonction périodique de période T alors pour tous $x \in D$ et $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + kT) = f(x)$.
Ainsi, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle d'amplitude T, le reste de la courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduisant à l'aide de translations de vecteurs $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

Définition 4
Soit f une fonction réelle définie sur D.

- On dit que f est **majorée** si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$$
On dit alors que M est un **majorant** de f.
- On dit que f est **minorée** si
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$$
On dit alors que m est un **minorant** de f
- On dit que f est **bornée** si f est majorée et minorée.

Proposition 3
Soit f une fonction réelle définie sur D. f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.

1.4 Variations

Définition 5
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.
- On dit que f est **constante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I, f(x) = f(y)$$

- On dit que f est **croissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- On dit que f est **strictement croissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- On dit que f est **décroissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- On dit que f est **strictement décroissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Si f est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I on dit qu'elle est (strictement) **monotone** sur I.

Proposition 4
Soient f et g des fonctions réelles définies sur un intervalle I non réduit à un point
- Si f et g sont monotones sur I, alors $f + g$ est monotone sur I, avec la même monotonie.
- Si f est croissante sur I, alors $-f$ est décroissante sur I.

Proposition 5
Soient I et J des intervalles, f et g des fonctions réelles définies respectivement sur I et J avec $f(I) \subset J$.
On suppose que f et g sont monotones sur leurs domaines.
- Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante ;
- si f et g n'ont pas la même monotonie, alors $g \circ f$ est décroissante.

1.5 Limites

Définition 6
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. a désigne un réel de I ou une borne finie de I.
On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en a si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les images $f(x)$ pour x suffisamment proche de a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in I \quad (|x - a| \leq r \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$$

Définition 7
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle de la forme $I = [a, +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, a]$).
- On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les images $f(x)$ pour x (resp. $-x$) suffisamment grand :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \quad (x \geq x_0 \text{ (resp. } x \leq x_0) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$$

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $[M, +\infty[$ contient toutes les images $f(x)$ pour x (resp. $-x$) suffisamment grand :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \quad (x \geq x_0 \text{ (resp. } x \leq x_0) \Rightarrow f(x) \geq M)$$

- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]-\infty, M]$ contient toutes les images $f(x)$ pour x (resp. $-x$) suffisamment grand :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \quad (x \geq x_0 \text{ (resp. } x \leq x_0) \Rightarrow f(x) \leq M)$$

Proposition 6
Si une fonction réelle f admet une limite, finie ou infinie, en un réel a (resp. en $\pm\infty$), alors cette limite est unique. On la note $\lim_{x \to a} f(x)$ (resp. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$).

Définition 8
Si une fonction réelle f admet une limite finie en chacun des réels de son domaine de définition D, on dit qu'elle est **continue** sur D.

Théorème 1 Théorème de bijection
Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle établit une bijection entre I et $f(I)$.

1.6 Dérivation

Définition 9
Soit f une fonction réelle définie sur D.
On dit que f est dérivable en $a \in D$ si la fonction **taux d'accroissement** de f en a : $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a.
On note alors $f'(a)$ cette limite, appelé **nombre dérivé** de f en a. On a également :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 10
Soit f une fonction réelle définie sur D. On dit que f est **dérivable** sur $I \subset D$ si f est dérivable en tout point de I.
Si f est dérivable sur I, on appelle **dérivée** de f sur I la fonction qui associe à tout réel $x \in I$ le nombre dérivé de f en x :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Définition 11
Si f est dérivable sur D et si sa dérivée f' est continue sur D, on dit qu'elle est de classe C^1 sur D.
L'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur D se note $C^1(D, \mathbb{R})$.

Définition 12
Si f est dérivable sur D et si sa dérivée est dérivable sur D on dit que f est **deux fois dérivable** sur D. La dérivée de la dérivée, appelée **dérivée d'ordre 2** est notée f''.
On définit ainsi par récurrence la **dérivée d'ordre** k comme la dérivée de la dérivée d'ordre $k-1$, lorsqu'elle existe.
Si une fonction est k fois dérivable, $k \in \mathbb{N}^*$, et si sa dérivée d'ordre k est continue, on dit que f est de classe C^k sur D. On note $f \in C^k(D, \mathbb{R})$.
Si f admet des dérivées d'ordre k pour tout entier k, on dit qu'elle est de classe C^∞, et on note $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$.

Proposition 7
Soient f et g des fonctions dérivables sur D, λ et μ des réels.
- La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D et pour tout $x \in D, (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- La fonction $f\,g$ est dérivable sur D et pour tout $x \in D, (f\,g)' = f'g + f\,g'$.
- Si g ne s'annule pas sur D, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 8
Soient f une fonction réelle définie sur D, et g une fonction définie sur un ensemble E tel que $f(D) \subset E$.
Si f et g sont dérivables sur leurs domaines respectifs, alors $g \circ f$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Proposition 9
Soit f une fonction dérivable sur D. Si f établit une bijection entre D et E et si pour tout $x \in D, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur E et

$$\forall x \in E, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Théorème 2
Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en des points isolés de I où $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) > 0$ sauf éventuellement en des points isolés de I où $f'(x) = 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Définition 13
Une fonction complexe f définie sur D est dérivable sur D si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
On note f', encore appelée **fonction dérivée** de f, la fonction définie sur D par

$$f'(x) = (\mathrm{Re}(f))'(x) + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}(f))'(x)$$

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions logarithmes

Définition 14
On appelle **fonction logarithme** toute fonction f non identiquement nulle définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

Proposition 10
Si f est une fonction logarithme, alors :
- $f(1) = 0$
- $\forall x > 0, \forall y > 0, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x), \quad f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x > 0, f(x^n) = nf(x)$

Proposition 11

Si f est une fonction logarithme, alors pour tout réel strictement positif x, on a : $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.

Définition 15

On appelle fonction **logarithme népérien**, la fonction logarithme, notée ln, telle que $\ln'(1) = 1$.

Remarque 2

(a) La fonction ln est la primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1.
(b) La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 12

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs strictement positives, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad (\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Proposition 13

Pour tout réel $x > -1$ on a :

$$\ln(1+x) \leq x$$

Proposition 14

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Proposition 15

Une fonction f est une fonction logarithme si, et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Définition 16

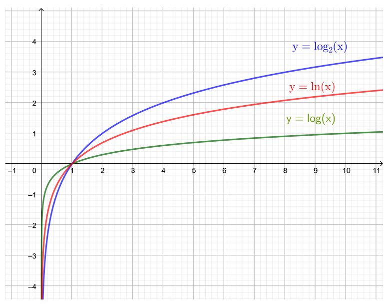
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **logarithme de base** a, et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

On note en particulier log le logarithme de base 10, et on a : pour tout $n \in \mathbb{Z}, \log(10^n) = n$ (résultat très utilisé en physique et en chimie !)

Remarque 3

(a) $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\log_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)\, x}$.
(b) Si $a > 1$, alors $\log_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) Si $0 < a < 1$ alors $\log_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$



2.2 Fonctions exponentielles

Les fonctions logarithmes sont continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}_+^*$; de plus, elles prennent toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de bijection, elles établissent une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$.

Définition 17
On appelle **fonctions exponentielles** les bijections réciproques des fonctions logarithmes.
En particulier, on note **exp** la bijection réciproque de ln :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la bijection réciproque de la fonction $\log_a$ s'appelle **exponentielle de base** a :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \exp_a(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \log_a(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

Proposition 16
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Notations :
On note $\mathrm{e} = \exp(1)$ ($\mathrm{e} \simeq 2,718$). Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.
Par extension et par convention, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \exp_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. On note $\exp_a(x) = a^x$.

Remarque 4
La fonction exp est une fonction exponentielle de base e, simplement appelée fonction exponentielle.

Proposition 17
Pour $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
- $\ln(a^x) = x\ln(a)$; cette égalité étant également vraie pour $a = 1$.
- $a^{x+y} = a^x\, a^y$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.
- $(ab)^x = a^x b^x$.

Proposition 18
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ la fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x) = \ln(a)a^x$$

Remarque 5
(a) la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
(b) Si $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
(c) Si $0 < a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 19
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et on a :

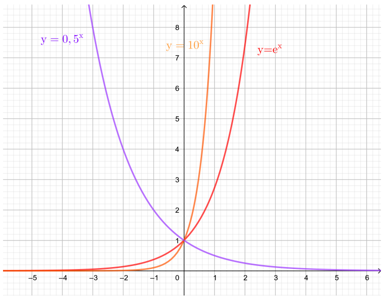
$$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$$

Proposition 20
Pour tout réel x on a :

$$\exp(x) \geq x$$

Proposition 21

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$



2.3 Fonctions puissances

Définition 18
On appelle **fonctions puissances** les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, pour un réel a donné par

$$f_a : x \mapsto x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$$

Proposition 22
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On a :

$$(xy)^a = x^a\,y^a, \quad x^{a+b} = x^a\,x^b, \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

Proposition 23
Etant donné $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

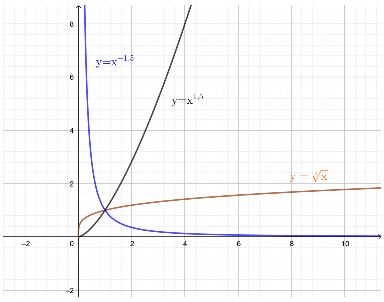
$$\forall x > 0, \quad f_a'(x) = a\,x^{a-1}$$

Remarque 6
(a) Si $a > 0$, f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
(b) Si $a = 0$, f_a est constante ;
(c) Si $a < 0$, f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 19
Lorsque $a = \dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_a est appelée **racine n-ème** et on note pour $x > 0, (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
On a :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

Remarque 7
La fonction racine n-ème se prolonge pour $x = 0$ en posant $\sqrt[n]{0} = 0$.



Théorème 3 Croissances comparées
Pour a et b strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0,\quad \lim_{x\to0}x^b|\ln(x)|^a=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}|x|^b e^{ax}=0$$

2.4 Fonctions hyperboliques

Définition 20
- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** la fonction, notée ch, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** la fonction, notée sh, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Remarque 8
(a) La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.
(b) La fonction ch est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

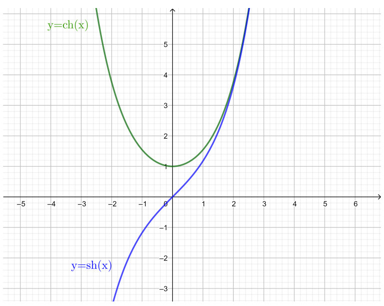
Proposition 24
Pour tout réel x on a :

$$\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1$$

Proposition 25
Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x)=\operatorname{sh}(x)\quad \text{et}\quad \operatorname{sh}'(x)=\operatorname{ch}(x)$$

Proposition 26
- La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2.5 Fonctions circulaires réciproques

2.5.1 Fonction Arcsinus

La fonction sin est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
D'après le théorème de bijection, elle admet donc une fonction réciproque de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Définition 21
On appelle **Arcsinus** notée **Arcsin** la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \text{Arcsin}(x) \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right.$$

Remarque 9

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

Proposition 27
- La fonction Arcsin est impaire.
- La fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Proposition 28

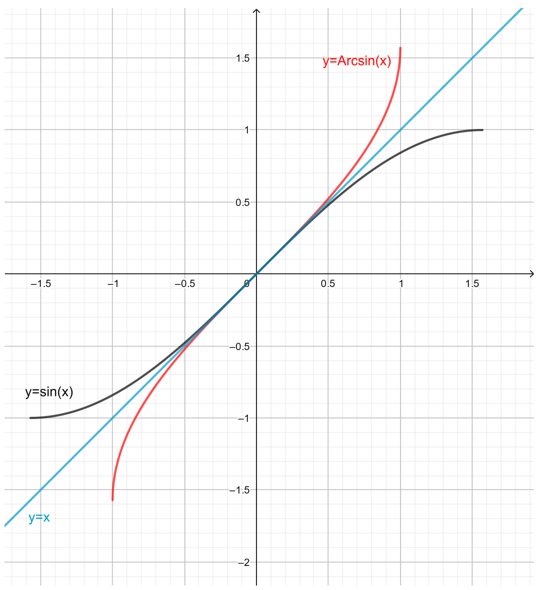
$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Proposition 29
La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition 30
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1, 1[$, alors $\text{Arcsin}(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$(\text{Arcsin}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$



2.5.2 Fonction Arccosinus

La fonction cos est continue et strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
D'après le théorème de bijection, elle admet donc une fonction réciproque de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

Définition 22
On appelle **Arccosinus** notée **Arccos** la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\text{Arccos}(x) \\ x\in[-1,1] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cos(y) \\ y\in[0,\pi] \end{array}\right.$$

Remarque 10

$$\forall x\in[-1,1],\quad \cos\left(\text{Arccos}(x)\right)=x \quad \text{et} \quad \forall x\in[0,\pi]\,,\quad \text{Arccos}(\cos(x))=x$$

Proposition 31
La fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 32

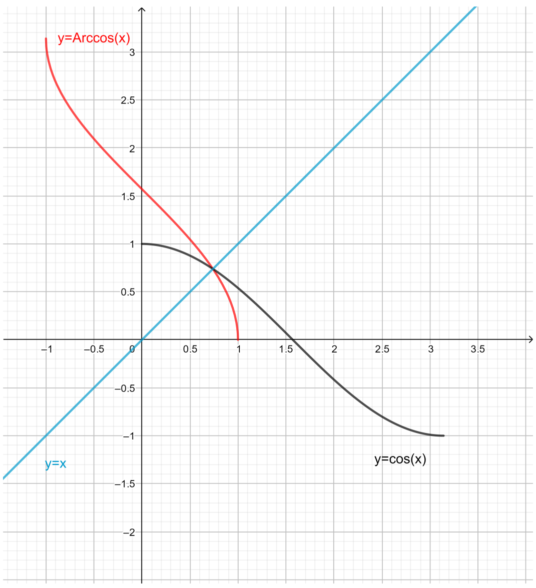
$$\forall x\in[-1,1],\quad \sin\left(\text{Arccos}(x)\right)=\sqrt{1-x^2}$$

Proposition 33
La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \text{Arccos}'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 34
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1,1[$, alors Arccos(u) est dérivable sur I et on a :

$$(\text{Arccos}\ u)'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$



2.5.3 Fonction Arctangente

La fonction tan est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de bijection, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Définition 23
On appelle **Arctangente** notée **Arctan** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \text{Arctan}(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

Remarque 11

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

Proposition 35
- La fonction Arctan est impaire.
- La fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 36

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$$

Proposition 37
La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 38
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\text{Arctan}(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$(\text{Arctan } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$