Chap 2 - COMPLEMENTS EN CALCUL ALGEBRIQUE - TRIGONOMETRIE

1 Sommes et produits

1.1 Notations

On considère $\{a_i, i \in I\}$ une famille de nombres **indexée** sur $I \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

- On note $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i$ leur somme, et par convention, cette notation représentera 0 si I est vide.

  Lorsque $I = [\![n_0, n]\!]$ (où $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ et $n_0 \leq n$), on notera cette somme $\displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} a_i$ ou encore $\displaystyle\sum_{n_0 \leq i \leq n} a_i$.
- On note $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i$ leur produit, et par convention cette notation représentera 1 si I est vide.

  Lorsque $I = [\![n_0, n]\!]$ (où $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ et $n_0 \leq n$), on notera ce produit $\displaystyle\prod_{i=n_0}^{n} a_i$ ou encore $\displaystyle\prod_{n_0 \leq i \leq n} a_i$.

Remarque 1
L'indice i qui figure dans la notation $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i$ est appelé **indice de sommation**. C'est une "variable muette". Le choix de la lettre est uniquement conditionné par le fait qu'elle ne doit pas représenter une autre variable présente dans la somme.
Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ni^2 = \sum_{k=1}^{n} nk^2$, mais la lettre n ne peut pas être utilisée comme indice de sommation, car elle désigne un autre entier présent dans la somme.
Il en est de même pour le produit.

1.2 Exemples

n désigne un entier naturel non nul.

(a) $\displaystyle\prod_{1 \leq k \leq n} k = n!$ (se lit "factorielle n").

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.3 Changement d'indice

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de nombres.

On note $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$, et $P = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} a_i$.
On peut changer les indices en introduisant une nouvelle indexation en posant $j = i + k$, où k est un entier naturel. On obtient : $S = \displaystyle\sum_{j=k}^{n+k} a_{j-k}$ et $P = \displaystyle\prod_{j=k}^{n+k} a_{j-k}$.

Proposition 1
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Proposition 2
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Proposition 3
Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; cette formule est appelée **formule du binôme de Newton**.

Proposition 4
Si $n \neq 0$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 < n$. On a :

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_{n_0}$$

Une telle somme est appelée **somme télescopique**.

Si les nombres a_k sont tous non nuls, on a :

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n_0}}$$

Un tel produit est appelé **produit télescopique**.

1.4 Somme double

Soient I et J des parties finies de $\mathbb{N}$, et $\{a_{ij}, (i,j) \in I \times J\}$ une famille de nombres.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right)$$

Si $I = J = [\![1,n]\!]$, on note :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

Cette somme s'appelle **somme triangulaire**.

Proposition 5
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres (où I et J sont des parties finies de $\mathbb{N}$).

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Définition 1
On appelle **système linéaire** à coefficients réels de 2 équations à 2 inconnues x et y un système de la forme $\left\{\begin{array}{l} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{array}\right.$ où a_i et b_i sont des réels donnés pour $i \in \{1,2,3\}$.

On appelle **système linéaire** à coefficients réels de 3 équations à 3 inconnues x, y et z un système de la forme $\left\{\begin{array}{l} a_1x + a_2y + a_3z = a_4 \\ b_1x + b_2y + b_3z = b_4 \\ c_1x + c_2y + c_3z = c_4 \end{array}\right.$ où a_i, b_i et c_i sont des réels donnés pour $i \in \{1,2,3,4\}$.

Résoudre un système linéaire de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues, c'est chercher toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles toutes les égalités sont vérifiées.
Géométriquement, résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection de deux droites dans un plan et résoudre un système de trois équations à trois inconnues revient à chercher l'intersection de trois plans dans l'espace.

Définition 2
On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système :
- la permutation de deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- le produit d'une ligne par un réel non nul λ, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- l'addition à une ligne d'une autre ligne, multipliée par un réel λ, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Définition 3
Deux systèmes S et S' sont **équivalents**, ce que l'on note $S \sim S'$, si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

2.2 Pivot de Gauss

2.2.1 Cas de deux équations à deux inconnues

On considère un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues : $\left\{\begin{array}{l} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{array}\right.$.
Quitte à échanger les deux lignes, on suppose que $a_1 \neq 0$.
$\rightsquigarrow$ On divise L_1 par a_1 ; on obtient un système équivalent, et on note toujours L_i les nouvelles lignes.
$\rightsquigarrow$ On effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - b_1L_1$.
Le système est désormais équivalent à un système de la forme : $\left\{\begin{array}{l} x + \alpha_1y = \alpha_2 \\ \beta_1y = \beta_2 \end{array}\right.$
$\rightsquigarrow$ Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + \alpha_1y = \alpha_2\}$.
On note également cet ensemble $\{(\alpha_2 - \alpha_1y, y), y \in \mathbb{R}\}$; y est dite **inconnue non principale** du système.
Géométriquement, c'est le cas où les deux droites dont on cherche l'intersection sont confondues (ce qui se voit rapidement car les deux équations sont alors proportionnelles).
$\rightsquigarrow$ Si $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, le système n'a pas de solution.
Géométriquement, c'est le cas où les droites dont on cherche l'intersection sont strictement parallèles.
$\rightsquigarrow$ Si $\beta_1 \neq 0$, il y a une seule solution : $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha_2 - \dfrac{\alpha_1\,\beta_2}{\beta_1} \\ y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \end{array}\right.$
Géométriquement, c'est le cas où les droites dont on cherche l'intersection ont un unique point d'intersection.

2.2.2 Cas de trois équations à trois inconnues

On considère un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues : $\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=a_4 \\ b_1x+b_2y+b_3z=b_4 \\ c_1x+c_2y+c_3z=c_4 \end{cases}$.

Quitte à échanger deux lignes, on suppose que $a_1 \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ On divise L_1 par a_1 ; on obtient un système équivalent, et on note toujours L_i les nouvelles lignes.

$\rightsquigarrow$ On effectue les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - b_1L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - c_1L_1$.

Le système est désormais équivalent à un système de la forme : $\begin{cases} x+\alpha_1y+\alpha_2z=\alpha_3 \\ \beta_1y+\beta_2z=\beta_3 \\ \gamma_1y+\gamma_2z=\gamma_3 \end{cases}$.

$\rightsquigarrow$ Si $\beta_1=\gamma_1=0$, le système s'écrit : $\begin{cases} x+\alpha_1y+\alpha_2z=\alpha_3 \\ \beta_2z=\beta_3 \\ \gamma_2z=\gamma_3 \end{cases}$

- $\rightsquigarrow$ Si $\beta_2=\gamma_2=\beta_3=\gamma_3=0$, alors l'ensemble des solutions est $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+\alpha_1y+\alpha_2z=\alpha_3\}$.
  On note également cet ensemble $\{(\alpha_3-\alpha_1y-\alpha_2z, y, z), (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$; y et z sont dites **inconnues non principales** du système.
  Géométriquement, c'est le cas où les trois plans dont on cherche l'intersection sont confondus (ce qui se voit rapidement car les trois équations sont alors proportionnelles).
- $\rightsquigarrow$ Si $\beta_2=\gamma_2=0$ et $(\beta_3,\gamma_3)\neq(0,0)$, le système n'a pas de solution.
  Géométriquement, c'est le cas où deux des trois plans sont strictement parallèles.
- $\rightsquigarrow$ Si $(\beta_2,\gamma_2)\neq(0,0)$, et quitte à échanger les lignes, supposons que $\gamma_2\neq 0$, alors la dernière équation donne $z=\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}$.
  - $\rightsquigarrow$ Si l'équation $\beta_2z=\beta_3$ n'est pas vérifiée pour cette valeur de z, alors le système n'a pas de solution.
    Géométriquement, c'est le cas où l'un des plans est parallèle à la droite d'intersection des deux autres.
  - $\rightsquigarrow$ Sinon, le système a pour solutions $\left\{\left(\alpha_3-\alpha_1y-\alpha_2\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}, y, \dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}\right), y\in\mathbb{R}\right\}$.
    Géométriquement, c'est le cas où les trois plans s'interceptent selon une droite.
- $\rightsquigarrow$ Si $(\beta_1,\gamma_1)\neq(0,0)$, on applique l'algorithme vu précédemment au système $\begin{cases} \beta_1y+\beta_2z=\beta_3 \\ \gamma_1y+\gamma_2z=\gamma_3 \end{cases}$
  - $\rightsquigarrow$ Si ce système n'a pas de solution, il en est de même du système initial.
  - $\rightsquigarrow$ Si la résolution de ce système conduit à un ensemble de solutions de la forme $\{(y,z)\in\mathbb{R}^2, y=\lambda z+\mu\}$ où λ et μ sont des réels, alors l'ensemble des solutions du système initial est $\{(\alpha_3-(\alpha_1\lambda+\alpha_2)z-\alpha_1\mu, \lambda z+\mu, z), z\in\mathbb{R}\}$.
    Géométriquement, c'est le cas où les trois plans s'interceptent selon une droite.
  - $\rightsquigarrow$ Si la résolution du second système donne une unique solution (λ,μ) alors le système initial admet une unique solution $(\alpha_3-\alpha_1\lambda-\alpha_2\mu, \lambda, \mu)$.

3 Inégalités

3.1 Relation d'ordre

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation entre deux réels, dite **relation d'ordre**, notée $\leq$ telle que

$$x \leq y \text{ si, et seulement si } y-x \text{ est un nombre positif}$$

$x\leq y$ se lit "x inférieur ou égal à y".
De cette relation d'ordre, on définit également les relations suivantes :
$(x\geq y)\Leftrightarrow(y\leq x)$; $x\geq y$ se lit "x supérieur ou égal à y"
$(x<y)\Leftrightarrow(\,(x\leq y)\wedge(x\neq y)\,)$; $x<y$ se lit "x strictement inférieur à y".
$(x>y)\Leftrightarrow(\,(x\geq y)\wedge(x\neq y)\,)$; $x>y$ se lit "x strictement supérieur à y".

Proposition 6
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
• $(x \leq y) \Leftrightarrow (x + z \leq y + z)$
• $(\,(x \leq y) \wedge (0 < z)\,) \Leftrightarrow (xz \leq yz)$
• $(\,(x \leq y) \wedge (z < 0)\,) \Leftrightarrow (xz \geq yz)$

Définition 4
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
• A est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in A, x \leq M$$

Un tel réel M est appelé UN **majorant** de A.
• A est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in A, m \leq x$$

Un tel réel m est appelé UN **minorant** de A.
• A est dite **bornée** si elle est minorée et majorée.

Remarque 2
Si M est un majorant de A, tout réel supérieur à M est également un majorant de A.
Si m est un minorant de A, tout réel inférieur à m est également un minorant de A.

Définition 5
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
• Un réel M est appelé le **maximum** de A si

$$(M \in A) \wedge (\forall x \in A, \quad x \leq M)$$

• Un réel m est appelé le **minimum** de A si

$$(m \in A) \wedge (\forall x \in A, \quad m \leq x)$$

Remarque 3
(a) Le minimum d'un ensemble est aussi un minorant, mais un ensemble peut être minoré sans avoir de minimum. Par exemple, $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré par 0, mais n'admet pas de minimum.
(b) Le maximum d'un ensemble est aussi un majorant, mais un ensemble peut être majoré sans avoir de maximum. Par exemple, $\left\{1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré par 1, mais n'admet pas de maximum.

3.2 Intervalles

Définition 6
Dans $\mathbb{R}$, on définit différents types de sous-ensembles appelés **intervalles**.
Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$:
• $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$; cet intervalle est également appelé **segment**.
• $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$.
• $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.
• $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.
• $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$.
• $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$.
• $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.
• $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.

Notations :
On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$.

Proposition 7
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, $[a, b] \subset I$.

3.3 Valeur absolue

Définition 7
On appelle **valeur absolue** d'un réel x le nombre, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 8
Pour tous les réels x et y on a :
- $|x| = |-x|$
- $|x| \geq 0$ et $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- $|x| \geq x, |x| \geq -x$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- Si $x \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$

Théorème 1 Inégalité triangulaire
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Corollaire
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Proposition 9
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On a :

$$|x - a| \leq b \Leftrightarrow x \in [a - b, a + b]$$

3.4 Partie entière

Théorème 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$$

Définition 8
Pour tout réel x l'entier n défini dans le théorème précédent s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$; on a donc :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exemple 1
$\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$.

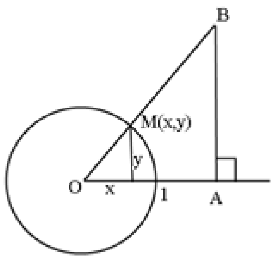
Proposition 10
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\lfloor x \rfloor = x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

4 Trigonométrie

4.1 Cercle trigonométrique

Définition 9
Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan orienté, et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (appelé **cercle trigonométrique**).
Soient M un point de $\mathscr{C}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
On appelle **cosinus** du réel x, noté $\cos(x)$ l'abscisse de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et **sinus** du réel x, noté $\sin(x)$, son ordonnée.
On définit ainsi un **paramétrage** du cercle trigonométrique, chaque point du cercle étant repéré par un couple de coordonnées de la forme $(\cos(x), \sin(x))$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Remarque 4
Soient OAB un triangle rectangle en A, $\theta = \widehat{AOB}$, et M le point du cercle trigonométrique de coordonnées $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.



Le théorème de Thalès donne : $\dfrac{x}{OA} = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{y}{AB} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos(\theta) = \dfrac{OA}{OB} \\ y = \sin(\theta) = \dfrac{AB}{OB} \end{cases}$
On retrouve donc les résultats vus en trigonométrie dans le triangle rectangle.

4.2 Congruence

Définition 10
Étant donnés deux réels x et y, on dit que x est **congru** à y **modulo** 2π, et on note $x \equiv y\ [2\pi]$ s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k\pi$.
De même, on dit que x est congru à y modulo π, et on note $x \equiv y\ [\pi]$ s'il existe un entier k tel que $x - y = k\pi$.

Proposition 11
Soient x, y, a, b des réels et n un entier.
- $x \equiv x\ [2\pi]$; on dit que la relation de congruence est **réflexive**.
- Si $x \equiv y\ [2\pi]$ alors $y \equiv x\ [2\pi]$; on dit que la relation de congruence est **symétrique**.
- Si $x \equiv y\ [2\pi]$ et $y \equiv a\ [2\pi]$, alors $x \equiv a\ [2\pi]$; on dit que la relation de congruence est **transitive**.
- Si $x \equiv y\ [2\pi]$ et $a \equiv b\ [2\pi]$ alors $x + a \equiv y + b\ [2\pi]$.
- Si $x \equiv y\ [2\pi]$, alors $nx \equiv ny\ [2\pi]$.

Proposition 12
Soient x et y deux réels.
$x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases}$

4.3 Relations trigonométriques

Proposition 13
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

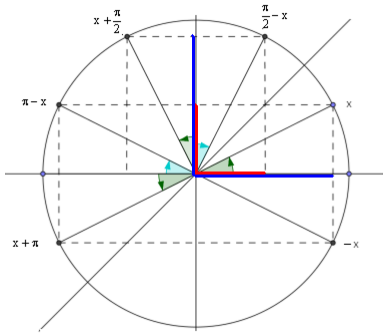
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Proposition 14
Soient a et b deux réels. On a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \Rightarrow \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad \Rightarrow \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Remarque 5
On retrouve en particulier, pour $x \in \mathbb{R}$, les relations suivantes qui s'observent aussi sur le cercle trigonométrique :

- $\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x); \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x); \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$.



4.4 Fonctions trigonométriques

Proposition 15
La fonction sin : $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Proposition 16
La fonction cos : $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Proposition 17
Pour tout réel x on a :

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

Définition 11
Pour tout réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on définit la **tangente** de x par : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 18
La fonction tan définie sur $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $x \mapsto \tan(x)$ est impaire, c'est-à-dire

$$\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

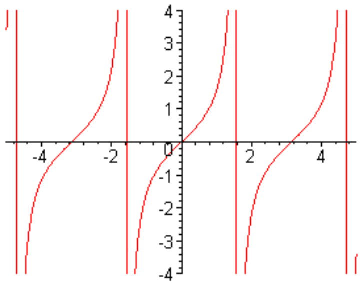
Proposition 19
Pour tout réel $x \in D_{tan}$, on a :

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \text{et} \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Proposition 20
La fonction tan est dérivable sur son domaine, et on a :

$$\forall x \in D_{tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On en déduit que la tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Proposition 21
Soient a et b des réels de D_{tan}.

- Si $a + b \in D_{tan}$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
- Si $a - b \in D_{tan}$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$