Chap 15 - DENOMBREMENT - PROBABILITES

1 Dénombrement

Dans ce paragraphe, on note $F_n = [\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
p désigne un entier naturel, inférieur ou égal à n.

1.1 Ensembles finis

Définition 1
On dit qu'un ensemble E est **fini, de cardinal** n s'il est en bijection avec F_n.
On note $\text{Card}(E) = n$, ou $|E| = n$.
Par convention, on dira que l'ensemble vide est de cardinal 0.

Proposition 1
Si B est une partie d'un ensemble fini A, alors B est un ensemble fini, et $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$.
Il y a égalité si, et seulement si $A = B$.

Proposition 2
Si B est une partie d'un ensemble fini A, alors

$$\text{Card}(B^C) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$$

Proposition 3
Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$$

Proposition 4
Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille d'ensembles finis, alors $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A_1)\,\text{Card}(A_2) \cdots \text{Card}(A_n)$$

Proposition 5
Pour tout ensemble fini E, l'ensemble des parties de E, $\mathscr{P}(E)$, est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Proposition 6
Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux n et m respectivement.
Le nombre d'applications de A dans B est m^n.

Proposition 7
Soient A et B deux ensembles finis de même cardinal, et f une application entre A et B. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

1.2 Permutation

Définition 2
On appelle **permutation** de F_n toute bijection de F_n sur F_n.
On note σ_n l'ensemble des permutations de F_n.

Proposition 8
σ_n est un ensemble fini et
$$\operatorname{Card}(\sigma_n) = n!$$

1.3 Arrangement

Définition 3
On appelle **arrangement de p éléments d'un ensemble** E **de cardinal n** tout p-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments distincts de E. Le nombre d'arrangements de p éléments de E se note A_n^p.

Exemple 1
$(2, 1, 4)$ et $(1, 2, 4)$ sont deux arrangements de 3 éléments de F_4.

Remarque 1
(a) La donnée d'un arrangement de p éléments d'un ensemble de cardinal n revient à la donnée d'une application injective de F_p dans F_n.
Plus précisément, il y a une bijection entre les applications injectives de F_p dans F_n et l'ensemble des arrangements de p éléments d'un ensemble de cardinal n.
(b) $\mathrm{A}_n^1 = n$ et $\mathrm{A}_n^n = n!$

Proposition 9
$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1.4 Combinaison

Définition 4
On appelle **combinaison de p éléments d'un ensemble** E **de cardinal n** toute partie de p éléments distincts de E.

Proposition 10
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n est
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque 2
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Proposition 11
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- **Formule de Pascal** : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 5
L'ensemble de toutes les issues possibles, ou **éventualités**, d'une **expérience aléatoire** (soumise au hasard) est appelé **ensemble fondamental**, ou **univers**, que l'on notera par la suite Ω.

Définition 6
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers Ω.
- Un **événement élémentaire**, ou **singleton**, est un événement ne contenant qu'une seule éventualité.
- $\varnothing$ est dit **événement impossible**.
- L'univers Ω est dit **événement certain.**

Définition 7
Etant donné un événement E dans un univers Ω, la négation de l'événement E, ou **événement contraire** de E, noté $\overline{E}$, est l'événement qui se réalise quand E ne se réalise pas, et qui ne se réalise pas quand E se réalise.
Il est composé des éventualités de Ω qui ne sont pas dans E : c'est le complémentaire dans Ω de E.

Définition 8
Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω.
- L'événement "E_1 et E_2", noté $E_1 \cap E_2$ est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2.
- Si $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, on dit que E_1 et E_2 sont **incompatibles.**
- L'événement "E_1 ou E_2", noté $E_1 \cup E_2$ est constitué de toutes les éventualités de E_1 et de toutes celles de E_2.

2.2 Espace probabilisé

Définition 9
On appelle **probabilité** sur un ensemble fini Ω toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :
★ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
★ $\forall (A,B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2, \quad A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

On se place désormais dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$***, où*** Ω ***est un univers fini.***

Définition 10
On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble E une famille de réels positifs, indexée sur E et de somme 1.

Remarque 3
Une probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée sur $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\omega_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 12
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Soit E un événement de Ω. Alors on a : $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ et $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
- Soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événements de Ω deux à deux incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω. Alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω. Si $E_1 \subset E_2$ alors $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2)$.

Définition 11
Lors d'une expérience aléatoire sur un univers Ω, lorsque chaque éventualité a la même probabilité de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité** sur l'univers.

Proposition 13
Lorsqu'il y a équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement E on a :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$$

En particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

2.3 Conditionnement et indépendance

Définition 12
Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

et se lit **probabilité de $\boldsymbol{A}$ sachant $\boldsymbol{B}$**.
Par convention, $\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(B) = 0$.

Proposition 14
L'application $\mathbb{P}_B$ définit une probabilité sur Ω ; elle vérifie notamment pour tout événement A :
$0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq 1$ et $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1$.

Remarque 4
Le "conditionnement" revient à changer d'univers : on se place dans l'univers B.

Proposition 15 Formule des probabilités composées
Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) \neq 0$, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbb{P}(E_1)\,\mathbb{P}\left(E_2|E_1\right)\mathbb{P}\left(E_3|E_1 \cap E_2\right)\cdots\mathbb{P}\left(E_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right)$$

Définition 13
On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Remarque 5
En pratique, on peut se trouver dans deux situations :
(a) Soit on connait la loi de probabilité et on cherche à savoir si deux événements sont indépendants, on doit alors vérifier par le calcul si l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ est vérifiée ;
(b) Soit on sait que les événements sont indépendants et on utilise l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ dans les calculs pour déterminer d'autres probabilités.

Remarque 6
Si A et B sont deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Proposition 16
Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont également.

Définition 14
On dit que les événements $E_1, \cdots, E_n$ sont **(mutuellement) indépendants** si

$$\forall I \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(E_i)$$

Attention ! L'indépendance des E_i deux par deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

Définition 15
On considère une expérience aléatoire constituée de l'enchaînement de n expériences aléatoires. Si chacune se déroule dans des conditions qui ne dépendant pas du résultat des autres, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.
La probabilité d'un résultat final est alors obtenue par le produit des probabilités de chacun des n résultats intermédiaires.

Définition 16
Une **partition de l'univers** Ω est un ensemble d'événements non vides, deux à deux incompatibles, dont l'union est Ω.

Théorème 1 Formule des probabilités totales
Si $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une partition de l'univers telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(E_i) \neq 0$ alors pour tout événement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{E_i}(A)\, \mathbb{P}(E_i)$$

Remarque 7
En particulier, si $\mathbb{P}(B) \neq 0, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

Théorème 2 Formule de Bayes
Si $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une partition de l'univers telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(E_i) \neq 0$ alors pour tout événement A de probabilité non nulle, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}_A(E_j) = \frac{\mathbb{P}_{E_j}(A)\, \mathbb{P}(E_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{E_i}(A)\, \mathbb{P}(E_i)}$$

3 Variables aléatoires

3.1 Généralités

Définition 17
Dans l'étude d'une expérience aléatoire, une **variable aléatoire** est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite **réelle**.

Notations : Etant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E, on notera :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}\right)$$

Définition 18
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E. La **loi de probabilité de X**, notée P_X, est déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$.
Si $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Remarque 8
L'univers Ω étant fini, une variable aléatoire définie sur Ω prend un nombre fini de valeurs :
$X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Ainsi, pour déterminer P_X, il faut exprimer $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
On les représente souvent dans un tableau.

Proposition 17
Soient X une variable aléatoire réelle et f une application définie sur $X(\Omega)$. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire, et si $F = f(X(\Omega))$, pour toute partie B de F, on a : $P_Y(B) = P_X(f^{-1}(B))$

Définition 19
Soient X une variable aléatoire réelle, et A un événement de Ω de probabilité non nulle. On définit la **loi conditionnelle de X sachant A** par :

$$\forall B \in \mathscr{P}(X(\Omega)), \quad P_{X|A}(B) = \mathbb{P}_A(X \in B) = \frac{\mathbb{P}\left((X \in B) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

3.2 Lois usuelles

3.2.1 Loi uniforme discrète

Définition 20
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \cdots, x_n$.
X suit une **loi uniforme discrète**, ou **loi équirépartie**, si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

On note $X \sim \mathscr{U}(x_1, \cdots, x_n)$.

3.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 21
Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** (avec $p \in [0, 1]$) si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Remarque 9
Cette loi modélise toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues arbitrairement appelées "succès" (pour $X = 1$) et "échec" (pour $X = 0$), avec respectivement les probabilités p et 1−p.
Une telle expérience est appelée **expérience de Bernoulli de paramètre p**.

3.2.3 Loi binomiale

Définition 22
Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres** $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $p \in [0, 1]$ si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!], \qquad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque 10
Cette loi modélise toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p, dans des conditions identiques et indépendantes, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours des n expériences.

3.3 Couple de variables aléatoires

Définition 23
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, prenant les valeurs $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_m$ respectivement.
Déterminer la **loi du couple (X, Y)**, ou **loi conjointe du couple**, c'est trouver les nombres $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tous les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$.
Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales du couple (X, Y)**.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…	x_n	Loi de Y
y_1	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_1;y_1))$	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_2;y_1))$	…	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_n;y_1))$	$\mathbb{P}(Y = y_1)$
y_2	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_1;y_2))$	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_2;y_2))$		$\mathbb{P}((X;Y) = (x_n;y_2))$	$\mathbb{P}(Y = y_2)$
…	…	…	…	…	…
y_m	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_1;y_m))$	$\mathbb{P}((X;Y) = (x_2;y_m))$		$\mathbb{P}((X;Y) = (x_n;y_m))$	$\mathbb{P}(Y = y_m)$
Loi de X	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$		$\mathbb{P}(X = x_n)$	1

Somme des valeurs de la colonne correspondante

Somme des valeurs de la ligne correspondante

Attention ! La connaissance de la loi conjointe donne les lois marginales, mais la connaissance des lois marginales ne donne pas la loi conjointe.

Définition 24
Soient X et Y deux variables aléatoires et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ la probabilité définie sur $Y(\Omega)$ par :
$\forall A \in \mathscr{P}(Y(\Omega)), \mathbb{P}_{X=x}(Y \in A) = \dfrac{\mathbb{P}((Y \in A) \cap (X = x))}{\mathbb{P}(X = x)}$.

Remarque 11
Si on connait la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, alors on connait la loi conjointe de X et Y.

3.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 25
Deux variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Définition 26
Les variables aléatoires $X1, \cdots, X_n$ sont dites **(mutuellement) indépendantes** si pour tout
$(A_1, \cdots, A_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 18
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{B}(p)$, alors la variable aléatoire $X = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Théorème 3
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Proposition 19 Lemme des coalitions
Si les variables aléatoires réelles $X_1, \cdots X_n$ sont indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$, $p \in [\![1, n-1]\!]$, alors les variables aléatoires $f(X_1, \cdots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 12
Cette propriété s'étend au cas de plus de deux coalitions.

3.5 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

3.5.1 Espérance mathématique

Définition 27
Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω, telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
On définit **l'espérance mathématique de X** par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Proposition 20
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, a et b des réels.
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
- Si $X \leq Y$ (c'est-à-dire, $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$), alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
  Attention ! La réciproque est fausse.

Proposition 21
Soit X une variable aléatoire.
- Si X est constante égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- Si $X = 1_A$, où A est un événement non vide, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Théorème 4 Théorème de transfert
Soient X une variable aléatoire réelle et f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

3.5.2 Variance, écart type et covariance

Définition 28
Soit X une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \cdots, x_n$.
On appelle **variance de X** le réel

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

On appelle **écart type de X** le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Proposition 22 **Formule de König - Huygens**

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Proposition 23
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, a et b des réels.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Proposition 24
Soit X une variable aléatoire réelle.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
- si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Définition 29
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* du couple (X,Y) le nombre :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)$$

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites **décorrélées**.

Proposition 25
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Proposition 26
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

3.5.3 Inégalités probabilistes

Proposition 27 **Inégalité de Markov**
Si X est une variable aléatoire réelle **positive** alors pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposition 28 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$