Chap 14 - INTEGRATION

Dans tout le chapitre a et b désignent des réels tels que $a < b$.

1 Intégrale d'une fonction en escalier

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle **subdivision du segment** $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ de points de $[a, b]$ vérifiant : $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.
- On dit que la subdivision est **régulière** lorsque pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
- Si une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ est régulière on appelle **pas de la subdivision** la longueur de chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, c'est-à-dire le nombre $\dfrac{b-a}{n}$.

Définition 2

- Soit φ un application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est **une fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe un subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de $[a, b]$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \quad \varphi(x) = \lambda_k$$

- Lorsqu'une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ est constante sur chaque intervalle d'une subdivision σ de $[a, b]$, on dit que la subdivision σ est **adaptée**, ou **subordonnée,** à φ.
  On note $\mathscr{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Remarque 1
Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$ adaptée à $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$, alors la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à φ.

Proposition 1
L'ensemble $\mathscr{E}([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Théorème 1
Soient $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$ et $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ telle que
$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \ \varphi(x) = \lambda_k$.
Le réel $I(\varphi, \sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie.

Définition 3
La valeur du nombre $I(\varphi, \sigma)$ du théorème précédent est appelée **intégrale** de φ sur $[a, b]$. On le note
$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$, ou $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\displaystyle\int_a^b \varphi$.

Interprétation géométrique :
$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ représente une somme d'aires algébriques de rectangles dans un repère orthonormé.

1.2 Propriétés

Proposition 2 Linéarité

Soit $(\varphi,\psi)\in(\mathscr{E}([a,b]))^2$. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\int_a^b\varphi+\beta\int_a^b\psi$.

Proposition 3 Positivité

Soit $\varphi\in\mathscr{E}([a,b])$, telle que $\forall x\in[a,b],\varphi(x)\geq 0$. Alors $\displaystyle\int_a^b\varphi\geq 0$.

Proposition 4 Conservation de l'ordre

Soit $(\varphi,\psi)\in(\mathscr{E}([a,b]))^2$. Si $\varphi\leq\psi$ alors $\displaystyle\int_a^b\varphi\leq\int_a^b\psi$.

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Définition

Théorème 2
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe φ,ψ dans $\mathscr{E}([a,b])$ telles que pour tout $x\in[a,b],\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$ et $\psi(x)-\varphi(x)\leq\varepsilon$.

Théorème 3
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
On note $E^-(f)=\left\{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,\varphi\in\mathscr{E}([a,b]),\varphi\leq f\right\}$ et $E^+(f)=\left\{\displaystyle\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x,\psi\in\mathscr{E}([a,b]),\psi\geq f\right\}$.
On a :

$$I(f)=\sup\left(E^-(f)\right)=\inf\left(E^+(f)\right)$$

Définition 4
La valeur du nombre $I(f)$ du théorème précédent est appelée **intégrale** de f sur $[a,b]$. On le note
On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou $\displaystyle\int_{[a,b]}f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.
Par convention, $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique, en unités d'aires, de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $x=a,x=b$ et $y=0$.

Définition 5
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
Le réel $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est appelé **valeur moyenne de** f sur $[a,b]$.

Définition 6
Soit f une fonction complexe continue sur $[a,b]$. On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b\mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x$$

2.2 Propriétés

- **Relation de Chasles**
  Soit f une fonction réelle ou complexe continue sur $[a, b]$.

$$\forall c \in [a, b], \qquad \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- **Linéarité**
  Soient f et g des fonctions réelles ou complexes, continues sur $[a, b]$.

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **Conservation de l'ordre**
  Soit f et g des fonctions réelles, continues sur $[a, b]$, avec $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **Positivité stricte**
  Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$. Alors on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$

  et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

  Remarque 2

  Si f est continue positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$.

- **Inégalité triangulaire**
  Soit f une fonction réelle ou complexe continue sur $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

Proposition 5
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$, avec $g \geq 0$.
En posant $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} (f(x))$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} (f(x))$, on a :

$$m \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad \textbf{Inégalité de la moyenne}$$

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad \textbf{Formule de la moyenne}$$

Remarque 3
On a en particulier, $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Théorème 4 Inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$. On a :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x$$

Théorème 5 Sommes de Riemann
Si f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 4
On a également : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3 Théorèmes du calcul intégral

3.1 Lien entre intégrale et primitive

Théorème 6
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.
La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Pour tout primitive F de f sur $I = [a, b]$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Si une fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 7
Soit f une fonction réelle ou complexe, de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. on a :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \left|\sup_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}(x)\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$