Chap 13 - APPLICATIONS LINEAIRES

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Ensemble des applications linéaires

1.1 Structure de l'ensemble des applications linéaires

Définition 1
Soit u une application de E dans F.
- On dit que u est une **application linéaire** si :
  ★ $\forall (x,y) \in E^2, \quad u(x+y) = u(x) + u(y)$
  ★ $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad u(\lambda x) = \lambda u(x)$

  On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
  On dit également qu'une application linéaire est un **morphisme d'espaces vectoriels**.

- Si u est une application linéaire bijective, on dit que u est un **isomorphisme**.
  S'il existe un isomorphisme entre E et F, on dit que E et F sont **isomorphes**.
- Si $E = F$, on dit que l'application linéaire u est un **endomorphisme**.
  L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathscr{L}(E)$.
  Si $E = F$ et si u est un isomorphisme, on dit que u est un **automorphisme** de E.
  L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathrm{Aut}(E)$.
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que l'application linéaire u est une **forme linéaire**.

Remarque 1
Pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on a :
(a) $u(0_E) = 0_F$.
(b) $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$.

Proposition 1
Soit u une application de E dans F. u est une application linéaire si, et seulement si :

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

Exemple 1
(a) $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$.
(b) $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+3y \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
(c) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2, I : \left| \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$, est une forme linaire sur $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(d) Si $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$ (ensemble des vecteurs de l'espace) alors $\varphi_{\overrightarrow{u}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array} \right.$ est un endomorphisme sur $\mathscr{V}$.
(e) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour $a \in \mathbb{K}^*, h_a : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right.$ est un automorphisme de E, appelé **homothétie de rapport a.**

Théorème 1
Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Corollaire 1
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, et si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I, u(e_i) = f_i$.

Corollaire 2
Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ($E = E_1 \oplus E_2$), alors :
- $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.
- Si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Définition 2
Si $E = E_1 \oplus E_2$:
- On appelle **projecteur**, ou **projection**, sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p défini sur E par ses restrictions : $p_{|E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $p_{|E_2} = 0_E$.
- On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme s défini sur E par ses restrictions : $s_{|E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $s_{|E_2} = -Id_{E_2}$.

Remarque 2
(a) Si on note $x = x_{E_1} + x_{E_2}$ la décomposition de x suivant E_1 et E_2, p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, alors on a :

$$p(x) = x_{E_1}, \quad s(x) = x_{E_1} - x_{E_2}, \quad \text{et} \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E$$

(b) Si on note p_{E_1} le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_{E_2} le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1, alors : $p_{E_1} + p_{E_2} = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 2
$\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
Si E est F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et
$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

1.2 Composition

Proposition 3
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Proposition 4
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si u est un isomorphisme, alors u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Définition 3
L'ensemble $\mathrm{Aut}(E)$ muni de la loi $\circ$ est appelé **groupe linéaire de $\boldsymbol{E}$**, noté $\mathrm{GL}(E)$.

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 5
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :
- Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau de u**, et on note **Ker(u)** l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E, u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$$

- On appelle **image de u**, et on note **Im(u)** l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{y \in F, \exists x \in E, u(x) = y\}$$

Proposition 6
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 7
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :
- u est injective si, et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.
- u est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

Théorème 2
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. $\mathrm{Im}(u)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.

Corollaire
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.

1.4 Image d'une famille de vecteurs

Proposition 8
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors on a : $u(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})) = \mathrm{Vect}(u(\mathscr{F}))$.
- u est surjective si, et seulement si l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
- u est injective si, et seulement si l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- u est bijective si, et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Remarque 3
(a) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(u(x_i)\right)_{i\in I}$
(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. L'application $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$ définie par
$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ est un isomorphisme.
On en déduit que tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
(c) Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si ils ont la même dimension.

1.5 Rang d'une application linéaire

Proposition 9
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie.

Définition 5
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on appelle **rang de u**, noté $\mathrm{rg}(u)$ l'entier

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$$

Théorème 3 Théorème du rang
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors on a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

Remarque 4
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors :
(a) Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\mathrm{rg}(u)$=$\mathrm{rg}(u(\mathscr{B}))$.
(b) $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(E)$.
(c) $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$ si, et seulement si u est injective.

Proposition 10
Si E et F sont de dimensions finies, et si $u \in \mathscr{L}(E,F), v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$$

Proposition 11
On suppose que E et F sont de dimensions finies. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
- Si v est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.
- Si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

Théorème 4
Si E et F sont de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors :

$$u \text{ est injective } \iff u \text{ est surjective } \iff u \text{ est bijective}$$

1.6 Caractérisation d'un projecteur et d'une symétrie

Proposition 12
Si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, alors $\mathrm{Im}(p) = E_1, \mathrm{Ker}(p) = E_2$ et $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.

Proposition 13
Soit p une application de E dans E. Alors p est un projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ linéaire} \\ p \circ p = p \end{cases}$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Proposition 14
Soit s une application de E dans E. Alors s est une symétrie $\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ linéaire} \\ s \circ s = \mathrm{Id}_E \end{cases}$.
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

1.7 Equations linéaires

Définition 6
Soient $b \in F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Toute équation du type $(L) : u(x) = b$ est appelée **équation linéaire**.
- L'équation $(H) : u(x) = 0$ est appelée **équation homogène** associée à (L).

Proposition 15
Soient $b \in F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $(L) : u(x) = b$.
- L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (L) est $S_H = \mathrm{Ker}(u)$.
- L'ensemble des solutions de l'équation (L) est :

$$S_L = \begin{cases} x_0 + S_H = \{x_0 + x \mid x \in S_H\} & \text{si } b = u(x_0) \in \mathrm{Im}(u) \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

2 Matrice d'une application linéaire

2.1 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Dans l'ensemble du paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et u désigne un application linéaire de E dans F.

Définition 7
Soient $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'=(f_1,\cdots,f_n)$ une base de F.
Pour $j\in[\![1,p]\!]$, on note $u(e_j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$, c'est-à-dire que les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathscr{B}'$ sont $(a_{1j},\cdots,a_{nj})$.
On appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice $(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$, notée :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)=\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} & \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

Si $E=F$ et $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$ on notera plus simplement $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Exemple 2
Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)=\mathrm{I}_p$.

Définition 8
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors :
- Pour tout vecteur $x\in E$, on note $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
- Pour toute famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs de E, on appelle **matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$**, notée $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Proposition 16
Soient $x\in E$, $y\in F$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
On note $X=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $Y=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(y)$ et $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ alors on a :

$$u(x)=y\Longleftrightarrow AX=Y$$

Proposition 17
Quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}'$ de F l'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\\ u & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)\end{array}\right.$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 5
Si $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ et $B=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)$ alors pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u+\lambda v)=A+\lambda B$.

Définition 9
Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire $u\in\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ ayant pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est dite **canoniquement associée à A**.

Proposition 18
Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$.
Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, et $v\in\mathscr{L}(F,G)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)=A$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(v)=B$ alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(v\circ u)=BA$$

Proposition 19
$u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si, et seulement si quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et F respectivement, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
De plus, si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u^{-1}) = \big(\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)\big)^{-1}$.

Proposition 20
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F telles que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \in [\![1,r]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.2 Changement de bases

Définition 10
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice dans la base $\mathscr{B}$, des vecteurs de $\mathscr{B}'$;
on la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Remarque 6
(a) Quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
(b) Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases de E, alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$.
(c) Quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Proposition 21 Changement de base pour un vecteur
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$. Si $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$$

Proposition 22 Changement de base pour une application linéaire
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. On note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ et $Q = P_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(u)$. On a :

$$A' = Q^{-1} A P$$

Proposition 23 Changement de base pour un endomorphisme
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a :

$$A' = P^{-1} A P$$

Définition 11
Soient A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1} A P$$

Remarque 7
Deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.

2.3 Noyau, image, rang d'une matrice

Définition 12
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note u l'application linéaire canoniquement associée à A.
- On appelle **noyau de $\boldsymbol{A}$**, noté $\mathrm{Ker}(A)$, l'ensemble des matrices dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ des vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$.
- On appelle **image de $\boldsymbol{A}$**, noté $\mathrm{Im}(A)$, l'ensemble des matrices dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ des vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition 24
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau) d'une matrice.

Définition 13
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de $\boldsymbol{A}$**, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille des p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dont elle est la matrice dans la base canonique.

Remarque 8
(a) $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) \leq \inf(n,p)$.
(b) Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et F respectivement, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)\right) = \mathrm{rg}(u)$$

Proposition 25
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice d'une application linéaire u. On a :
- $\mathrm{rg}(A) = n$ si, et seulement si u est surjective.
- $\mathrm{rg}(A) = p$ si, et seulement si u est injective.

Corollaire
$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{rg}(A) = n \Longleftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Proposition 26
Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a : $\mathrm{rg}(AB) \leq \inf\left(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\right)$.

Proposition 27
$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \forall C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \quad \mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$.

Corollaire
Les opérations élémentaires sur une matrice ne changent pas son rang.

Proposition 28
$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{rg}\left(A^T\right) = \mathrm{rg}(A)$.

2.4 Systèmes linéaires

Soit $\mathscr{S}$ un système linéaire de n équations à p inconnues, de matrice augmentée $(A|B)$.
On note u l'application linéaire canoniquement associée à A, et b le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont B est la matrice dans la base canonique.
On a : $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si $u(x) = b$.
C'est **l'interprétation vectorielle** de $\mathscr{S}$.

Proposition 29
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice associée à un système $\mathscr{S}$, alors :
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathscr{S})$.
- Le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
- Si $n = p$, et si A est inversible, alors le système $AX = B$ possède une unique solution.
- L'ensemble des solutions dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de l'équation homogène $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$.

Proposition 30
Soit $\mathscr{S}_0$ le système linéaire homogène de n équations à p inconnues d'écriture matricielle $AX = 0$. Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors l'ensemble des solutions de $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.