Chap 12 - ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définitions

Définition 1
Soit E un ensemble.
On appelle **loi de composition interne** sur E toute application de $E \times E$ dans E.
On appelle **loi de composition externe** sur E toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Exemple 1
Si $E = \mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
La somme de deux vecteurs : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{V}$.
Le produit d'un vecteur par un réel : $(\lambda, \overrightarrow{u}) \mapsto \lambda \overrightarrow{u}$ est une loi de composition externe sur $\mathscr{V}$.

Définition 2
On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** tout ensemble E muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, notée $\cdot$, telles que :

★ La loi interne $+$ vérifie les propriétés suivantes :
(1) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
(2) $\forall (x,y) \in E^2, x+y = y+x$.
(3) $\exists!\, e \in E, \forall x \in E, x+e = x$. Cet élément se note 0_E ou plus simplement 0.
(4) $\forall x \in E, \exists!\, x' \in E, x+x' = 0$. Cet élément se note $-x$.

★ La loi externe vérifie les propriétés suivantes pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$:
(1) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(2) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
(4) $1 \cdot x = x$

Proposition 1
$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda \cdot x = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } \lambda = 0)$

Corollaire
$\forall x \in E, -x = (-1)\cdot x$

Définition 3
Les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont appelés **vecteurs**. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

1.2 Exemples

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- Soient X un ensemble non vide, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\left(E^X, +, \cdot\right)$ des applications de X dans E muni des lois usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  En particulier, l'ensemble $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ des suites de $\mathbb{K}$ muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, muni de la somme et du produit par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2
Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
Alors E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes :
$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$
$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \cdots, , \lambda \cdot x_n)$

Exemple 2
Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on munit ainsi $\mathbb{R}^n$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E s'il vérifie :
(1) $F \neq \varnothing$
(2) $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$
(3) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda \cdot x \in F$

Proposition 3
F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si : $0_E \in F$ et $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times F^2, x + \lambda \cdot y \in F$.

Remarque 1
(a) Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par celles de E.
(b) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 4
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Alors $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention ! La proposition est fausse pour l'union.

Définition 5
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et A une partie non vide de E. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A s'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par A**. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarque 2
Pour toute partie non vide A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A pour l'inclusion.

Exemple 3
Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(\{X^0\})$ est l'ensemble des polynômes constants.

Définition 6
Soit A une partie non vide de E. On dit que x est une **combinaison linéaire d'éléments de $\boldsymbol{A}$** s'il existe une famille finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A et des scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$$

Proposition 5
Le sous-espace vectoriel engendré par une partie A de E est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Définition 7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On note $F_1 + F_2 = \{x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}$.
$F_1 + F_2$ est appelé **somme** de F_1 et F_2.

Remarque 3
$F_1 \subset F_1 + F_2$ et $F_2 \subset F_1 + F_2$

Proposition 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 8
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe** si la décomposition de tout vecteur de $F_1 + F_2$ comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 est unique, c'est-à-dire :

$$\forall x \in F_1 + F_2, \exists!\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, \quad x = x_1 + x_2$$

On note alors $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$.

Proposition 7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
F_1 et F_2 sont en somme directe si, et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition 9
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires** si $F_1 \oplus F_2 = E$.

Exemple 4
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

2 Bases d'un espace vectoriel

Dans la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Familles génératrices

Définition 10
On appelle **partie génératrice de $\boldsymbol{E}$** une partie non vide A de E telle que $\mathrm{Vect}(A){=}E$.
Si A est une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$, finie ou infinie, on dit que cette famille est une **famille génératrice de $\boldsymbol{E}$**.

Remarque 4
Soient A et B des parties de E. Si A est une partie génératrice de E alors $A \cup B$ est une partie génératrice de E.

Exemple 5
(a) $\{1\}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ et du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
(b) $\{1, \mathrm{i}\}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
(c) $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ forment une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Définition 11
On appelle **cardinal d'un ensemble** le nombre d'éléments qu'il contient s'il est fini, sinon on dit que le cardinal de l'ensemble est infini.

Définition 12
On dit qu'un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice de cardinal fini. Sinon, on dit qu'il est **de dimension infinie**.

Exemple 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie : $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}\,\{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)\}$.
(b) $\mathbb{K}_n[X]$ un espace vectoriel de dimension finie : $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\{X^i, i \in [\![0, n]\!]\}$.

Proposition 8
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est une famille génératrice de E et si $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots x_n\}$, alors $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une famille génératrice de E.

2.2 Familles libres

Définition 13
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$. On dit que la famille $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une **famille libre** si

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0_E \right) \Rightarrow (\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0)$$

Les éléments d'une famille libre sont dit **linéairement indépendants**.
Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**. Ses éléments sont dits **linéairement dépendants**.
Lorsque **DEUX** vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Exemple 7
(a) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les familles $\{1, \mathrm{i}\}$ et $\{1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}\}$ sont libres.
(b) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est libre,
mais la famille $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, -1, 0)\}$ est liée.
(c) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $\{x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto x\mathrm{e}^x\}$ est libre.
(d) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $\{X^0, X, \cdots X^n\}$ est libre.

Remarque 5
(a) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
(b) Une famille de E est liée si, et seulement si au moins un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
(c) La famille $\{x, y\}$ est liée si et seulement si $x = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $y = \lambda \cdot x$

Proposition 9
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille libre de E. Si $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots x_n\}$ alors la famille $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est libre.

Définition 14
Une famille de polynômes $\{P_k, 1 \leq k \leq n\}$ est dite **à degrés échelonnés** si on a :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Proposition 10
Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ à degrés échelonnés est libre.

2.3 Bases

Définition 15
On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Exemple 8
(a) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X], n \in \mathbb{N}^*$, $(X^0, X, \cdots, X^n)$ est une base.
(b) Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est une base.

Proposition 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, une base est donnée par la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que pour $k \in [\![1, n]\!]$, le n-uplet e_k est constitué de 0, sauf à la k-ème place où se trouve un 1.

Définition 16
La famille donnée dans la proposition précédente est appelée **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.

Proposition 12
Une famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

Définition 17
Les scalaires $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de la proposition précédente sont appelés **coordonnées**, ou **composantes** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 1
Tout espace vectoriel $E \neq \{0\}$ admet au moins une base.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie.

3.1 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 2
Soient $(e_i)_{i\in\mathscr{G}}$ une famille finie génératrice de E, et $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ tel que la famille $(e_i)_{i\in\mathscr{L}}$ soit une famille libre de E. Alors il existe $\mathscr{B}$ tel que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ et $(e_i)_{i\in\mathscr{B}}$ est une base de E.

Corollaire
- **Théorème de la base extraite**
  De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

- **Théorème de la base incomplète**
  Toute famille libre peut être complétée en une base.

Remarque 6
Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base formée d'un nombre fini de vecteurs.

Proposition 13
Si E admet une famille génératrice de n éléments, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Remarque 7
Il découle de la proposition précédente que si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet un famille génératrice de n éléments, alors toute famille libre admet au plus n éléments.

Théorème 3
Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.

Définition 18
Le cardinal des bases d'un espace vectoriel de dimension finie est appelé **la dimension de l'espace vectoriel**. On le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur $\mathbb{K}$.
Par convention, $\dim(\{0\}) = 0$.

Exemple 9
(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.
(c) Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Proposition 14
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, toute famille de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés est une base.

Proposition 15
Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre de n éléments est une base, et toute famille génératrice de n éléments est une base.

Définition 19
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, on appelle **dimension d'un sous-espace vectoriel** la dimension de l'espace vectoriel induit.
- Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**.
- Dans un espace de dimension $n \geq 2$, on appelle **hyperplan** tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Si $n = 3$, on dit simplement **plan vectoriel**.

Remarque 8
(a) Une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls.
(b) Un plan vectoriel est engendré par deux vecteurs non colinéaires.

Proposition 16
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $E \times F$ est de dimension finie, et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Remarque 9
Cette propriété s'étend au produit cartésien de n espaces vectoriels de dimensions finies.

3.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 20
Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier naturel $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathscr{F}))$.

Proposition 17
Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
- $\text{rg}(\mathscr{F})$ est le plus grand cardinal des sous-familles libres de $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}(\mathscr{F})$.

3.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 18
Soit E un espace-vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
De plus on a $\dim(F) = \dim(E)$ si, et seulement si $F = E$.

Proposition 19
Si $\dim(E) = n$ et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p alors :
- F admet au moins un supplémentaire dans E.
- Tout supplémentaire de F dans E est de dimension $n - p$.

Remarque 10

$$E = F \oplus G \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Proposition 20
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels non nuls de E, $(x_1, \cdots, x_p)$ une base de F et $(y_1, \cdots, y_q)$ une base de G. Alors, $E = F \oplus G$ si, et seulement si $(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q)$ est une base de E.
Une telle base de E est dite **base adaptée à la décomposition** $F \oplus G$.

Théorème 4 Théorème de Grassmann
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Proposition 21
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $E = F \oplus G$
(ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
(iii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$