CHAP 11 - POLYNOMES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.1 Notion de polynôme

Définition 1
On appelle **polynôme à une indéterminée X et à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute expression de la forme

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

où $a_0, a_1, \cdots a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés **coefficients**.
Le coefficient a_0 est appelé **coefficient constant**.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le terme a_kX^k est appelé **monôme de degré k**.
Deux polynômes sont égaux si, et seulement si tous les coefficients des monômes de même degré sont égaux.
Lorsque tous les coefficients sont nuls, on dit que P est le **polynôme nul**, noté $P = 0$.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1
(a) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

On lui associe la **fonction polynômiale** $\widetilde{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kx^k \end{array} \right.$

En pratique, on confondra polynôme et fonction polynômiale, et on notera $P(a)$ pour $\widetilde{P}(a)$.
(b) On identifie $\mathbb{K}$ avec l'ensemble des polynômes constants $P = a_0$.

Définition 2
On dit qu'un polynôme est **pair** (resp. **impair**) si la fonction polynômiale associée est une fonction paire (resp. impaire).

Proposition 1
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$.

- P est un polynôme pair si, et seulement si n est pair ($n = 2p$), et $\forall k \in [\![0, p-1]\!], a_{2k+1} = 0$.
- P est un polynôme impair si, et seulement si n est impair ($n = 2p + 1$), et $\forall k \in [\![0, p]\!], a_{2k} = 0$.

Définition 3
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.
On appelle **degré de P** et on note $\deg(P)$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Si P est de degré n, le coefficient a_n est appelé **coefficient dominant** de P.
Un polynôme est dit **unitaire**, ou **normalisé**, si son coefficient dominant est 1.
Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble contenant tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n, y compris le polynôme nul, est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

1.2 Opérations

Définition 4
Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

- En complétant les écritures par des zéros si besoin (c'est-à-dire par exemple si $p < q$ on pose $a_{p+1} = \cdots = a_q = 0$), et en notant $n = \max(p, q)$, on définit la **somme de deux polynômes** par : $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$.
- On définit **le produit d'un polynôme par un scalaire** par : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$.
- On définit le **produit de deux polynômes** par : $P \cdot Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$, où $\forall k \in [\![0, p+q]\!], c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
- Par récurrence, on définit **la puissance d'un polynôme**, avec $P^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P \cdot P^n$

Proposition 2
Soient P et Q des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

- Si $P + Q \neq 0$, alors $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Remarque 2
$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $\widetilde{P + Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$ et $\widetilde{P \cdot Q} = \widetilde{P} \cdot \widetilde{Q}$

Proposition 3
Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

- $P + Q = Q + P$ et $P \cdot Q = Q \cdot P$ (les lois sont **commutatives**).
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ et $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$ (les lois sont **associatives**).
- $P + 0 = P$ (0 est le neutre pour la somme) et $P \cdot 1 = P$ (1 est le neutre pour le produit)

Définition 5
Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
Le polynôme **composé** de P et Q, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$ est le polynôme que l'on obtient en remplaçant dans l'expression de P l'indéterminée X par l'expression de Q : $P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$.

Remarque 3
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
(a) $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
(b) En général, $P \circ Q \neq Q \circ P$.

Proposition 4
Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

1.3 Polynôme dérivé

Définition 6
Etant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on appelle **polynôme dérivé de P**, et on note P' le polynôme défini par :

⇝ $P' = 0$ si P est un polynôme constant.
⇝ Sinon, $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.
Par récurrence, on définit la dérivée k-ème de P, notée $P^{(k)}$, avec :
$P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Remarque 4
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\widetilde{P'} = \left(\widetilde{P}\right)'$.

Proposition 5
Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $(P+Q)' = P' + Q'$.
- $(\alpha P)' = \alpha P'$.
- $(P \cdot Q)' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$.
- **Formule de Leibniz :** $\forall n \in \mathbb{N}, (P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \cdot Q^{(n-k)}$.

Théorème 1 Formule de Taylor

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \forall a \in \mathbb{K} \quad P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Remarque 5
En particulier, pour $a = 0$, on a : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

2 Factorisation d'un polynôme

2.1 Division euclidienne

Théorème 2
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $A = B \cdot Q + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Définition 7
L'écriture $A = B \cdot Q + R$ s'appelle **la division euclidienne de A par B**.
Q s'appelle le **quotient** de la division, et R s'appelle de **reste**.

Remarque 6
Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$; le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.

Définition 8
Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A est divisible par B**, ou que **B divise A**, si le reste de la division euclidienne de A par B est 0, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.
  Si A est divisible par B on dit que A est un **multiple** de B et que B est un **diviseur** de A.

- On dit que A est **irréductible dans** $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il est divisible seulement par des polynômes constants et les polynômes de la forme λA où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

2.2 Racines d'un polynôme

Définition 9
Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine**, ou **un zéro**, de P si $\widetilde{P}(a) = 0$.

Proposition 6
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. a est une racine de P si, et seulement si P est divisible par $X - a$.

Proposition 7
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des racines distinctes de P alors P est divisible par $(X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n)$.

Corollaire
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$.

Définition 10
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit qu'une racine a de P est de **multiplicité** k si $(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P.
Si $k = 1$, on dit que a est une **racine simple**.

Remarque 7
(a) a est une racine de P de multiplicité k si, et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a)^k Q$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.
(b) La multiplicité de la racine d'un polynôme est inférieur ou égale au degré du polynôme.

Théorème 3
Soient $a \in \mathbb{K}, P \in \mathbb{K}[X]$. a est une racine de P de multiplicité k si, et seulement si :

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(n)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0$$

2.3 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 4 Théorème de D'Alembert-Gauss
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire
Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré au plus 1.

Proposition 8
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admettant r racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_r$ de multiplicités respectives $m_1, m_2 \cdots, m_r$ et de coefficient dominant a_n s'écrit : $P = a_n(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2}\cdots(X - \alpha_r)^{m_r}$.
On dit qu'un tel polynôme est **scindé**, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme un produit de polynômes de degrés au plus 1.

2.4 Relations entre coefficients et racines

Théorème 5
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, admettant pour racines $x_1, \cdots x_n$, certaines pouvant être égales. Alors on a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Corollaire
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 ($a \neq 0$). On note x_1 et x_2 ses racines (distinctes ou confondues). On a :

$$P = a(X^2 - sX + p), \quad \text{où } s = x_1 + x_2 \text{ et } p = x_1 x_2$$

Réciproquement, soient s et p des nombres complexes. Alors les solutions dans $\mathbb{C}$ du système $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les racines du polynômes $X^2 - sX + p$.

2.5 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Remarque 8
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut être considéré comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Proposition 9
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $P \in \mathbb{R}[X]$ si, et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Proposition 10
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. $a \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité k de P si, et seulement si $\overline{a}$ est une racine de multiplicité k de P.

Théorème 6
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme le produit de polynômes de degrés au plus 2.

Remarque 9
Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes constants, les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racine réelle.

Proposition 11
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

2.6 Décomposition en éléments simples

Proposition 12
Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$, et $F = \frac{A}{B}$ (appelé **fraction rationnelle de polynômes**). Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $F = Q + \frac{R}{B}$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Définition 11
On appelle **élément simple** dans $\mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle de polynômes de la forme $\frac{P}{Q^n}$ où Q est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré strictement inférieur à celui de Q.

Théorème 7
Toute fraction rationnelle de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire comme la somme d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et d'éléments simples dans $\mathbb{K}[X]$.

En particulier, si $F = \dfrac{A}{B}$, avec $B = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$, $a_1, \cdots, a_n$ étant des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $\deg(A) < \deg(B)$, alors

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(X - a_k)}, \quad \text{avec } \forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = ((X - a_k)F)(a_k) = \frac{A(a_k)}{B'(a_k)}.$$

Définition 12
L'écriture d'une fraction rationnelle F sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'éléments simples est appelée **décomposition en éléments simples** de F.