Chap 10 - GEOMETRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

1 Géométrie du plan

On considère le plan orienté $\mathscr{P}$, muni d'un unité de longueur.

1.1 Vecteurs

1.1.1 Définitions

Définition 1
Dans $\mathscr{P}$, deux bipoints (A, B) et (C, D) sont dits **équipollents** si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
Tous les bipoints équipollents permettent de définir un même objet mathématique appelé **vecteur**.
Le vecteur associé au bipoint (A, B) se note $\overrightarrow{AB}$. De façon générale un vecteur se note $\overrightarrow{u}$, et lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on notera également $B = A + \overrightarrow{u}$.
Le vecteur associé au bipoint (A, A) se note $\overrightarrow{0}$; il est appelé **vecteur nul**.
On notera $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Proposition 1
Un vecteur non nul $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction** (la droite (AB)), son **sens** (de A, appelé **origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vers B, appelé **extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$), et sa **norme** (la longueur AB) notée $\|\overrightarrow{u}\|$.
Le vecteur nul est caractérisé par une norme nulle.

Remarque 1
Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$, on peut toujours choisir un représentant ayant comme origine n'importe quel point du plan.

Définition 2
Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

Définition 3
- Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si l'un est nul ou s'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si l'un est nul, ou si leurs directions sont perpendiculaires.

1.1.2 Opérations

Définition 4
L'ensemble $\mathscr{V}$ est muni d'une loi, notée $+$, appelée somme.
Etant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$; on définit la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Proposition 2
Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathscr{V}^3, (A, B) \in \mathscr{P}^2$.
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (la somme est **commutative**.)
- $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$ (la somme est **associative**.)
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{0}$ est **neutre** pour la somme.)
- Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$, il existe $\overrightarrow{v} \in \mathscr{V}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ($\overrightarrow{v}$, est **l'opposé** de $\overrightarrow{u}$.)
  On note $-\overrightarrow{u}$ l'opposé de $\overrightarrow{u}$. En particulier, on a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Définition 5
L'ensemble $\mathscr{V}$ est muni d'une loi sur $\mathbb{R}$, notée $\cdot$ appelée **produit par un scalaire**.
Etant donnés un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un réel λ non nul, le vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$, le même sens si $\lambda > 0$ le sens contraire si $\lambda < 0$, et pour norme $|\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\|$.
Si $\|\overrightarrow{u}\| = \overrightarrow{0}$ ou $\lambda = 0$, alors $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 2
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur $\dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire de même direction et sens que $\overrightarrow{u}$.

Proposition 3
Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathscr{V}^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}; \quad (-1) \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$
- $\lambda \cdot (\mu \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$
- $\lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$
- $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$

1.1.3 Angles de vecteurs

Définition 6
Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs unitaires (les points A et B sont donc sur le cercle trigonométrique de centre O).
Au couple $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ on associe les nombres de la forme $\alpha + 2k\pi$ tels que α est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, parcouru de A vers B dans le sens direct, et $k \in \mathbb{Z}$.
Chacun de ces nombres est une **mesure en radians de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \alpha \, [2\pi]$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une mesure de l'angle $\left(\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)$.
Deux mesures d'un même angle orienté sont dites **égales à 2π près**.

Proposition 4
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens (resp. de sens contraire) si, et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv 0 \, [2\pi]$ (resp. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \pi \, [2\pi]$).

Proposition 5 Relation de Chasles
Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \, [2\pi]$.

Proposition 6
Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \, [2\pi]; \quad (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \, [2\pi]$.

1.2 Coordonnées

1.2.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 7
On appelle **repère cartésien du plan** tout triplet $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $O \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
O s'appelle **l'origine du repère**, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ s'appelle une **base** de $\mathscr{V}$.
Le repère (ou la base) est dit(e) **orthogonal(e)** si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux.
Le repère (ou la base) est dit(e) **orthonormé(e)** si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux et unitaires.
Le repère est dit **direct** si l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ admet une mesure en radian dans $]0, \pi[$.

Théorème 1
Etant donné un repère $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, pour tout point $M \in \mathscr{P}$ il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

Définition 8
Le couple (x, y) s'appelle **couple de coordonnées cartésiennes** de M dans $\mathscr{R}$.
x s'appelle **l'abscisse** du point M, y s'appelle **l'ordonnée** du point M.
La droite (OI) telle que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ s'appelle **l'axe des abscisses**.
La droite (OJ) telle que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ s'appelle **l'axe des ordonnées**.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$, on appelle **coordonnées de** $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ le couple (x, y) des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$.

Remarque 3
Les coordonnées d'un vecteur dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont indépendantes de l'origine du repère.

Proposition 7
Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, si A et B sont des points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) respectivement, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Proposition 8
Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, alors

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1.2.2 Coordonnées polaires

Définition 9
Soit $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.
Soit M un point situé sur le cercle trigonométrique de centre O. On note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
On appelle **cosinus** du réel θ l'abscisse de M dans $\mathscr{R}$ et **sinus** de θ son ordonnée, respectivement notés $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ noté $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (resp. $\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$) est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.

Proposition 9
Dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \left(\cos\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{j}\right)$.

Définition 10
Soient $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan et M un point distinct de O.
On appelle **coordonnées polaires de** M un couple (ρ, θ) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right)$.

Remarque 4
Il n'y a pas unicité du couple de coordonnées polaires.

1.3 Produit scalaire

Définition 11
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 10
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 11
Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Proposition 12
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une <u>base orthonormée directe</u>.
On a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Remarque 5
Dans un repère orthonormé, si A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Définition 12
Dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormée, on appelle **norme euclidienne** d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y), encore noté $\|\overrightarrow{u}\|$, le nombre :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Proposition 13
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs du plan, a et b des réels.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (on dit que le produit scalaire est **symétrique**)
- $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ (on dit que le produit scalaire est **bilinéaire**)

1.4 Produit mixte

Définition 13
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit mixte**, ou **déterminant**, de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ (ou det $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$) défini par :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 14
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan sont colinéaires si, et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.
Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$.

Proposition 15
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une <u>base orthonormée directe</u>.
On a :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Proposition 16
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs du plan, a et b des réels.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$
- $[a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = a[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + b[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$

Remarque 6
$|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.5 Droites du plan

1.5.1 Caractérisations d'une droite

Une droite D est entièrement déterminée par la donnée :
⇝ de deux points distincts A et B ; on note :

$$D = (AB) = \{M \in \mathscr{P}, \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = 0\}$$

ou

⇝ d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, appelé **vecteur directeur** ; on note :

$$D = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{M \in \mathscr{P}, \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right] = 0\}$$

ou

⇝ d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à tous les vecteurs directeurs de D, appelé **vecteur normal** ; on note :

$$D = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{n})^{\perp} = \{M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}$$

$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{n})^{\perp}$ désigne l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{n}$.

1.5.2 Equation cartésienne

Proposition 17
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, si D est une droite, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que le point de coordonnées (x, y) est sur D si, et seulement si $ax + by + c = 0$.
Réciproquement, étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $ax + by + c = 0$ est une droite.

Définition 14
L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée **équation cartésienne** de D.

Remarque 7
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, si la droite D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors le vecteur de coordonnées $(-b, a)$ est un vecteur directeur de D et le vecteur de coordonnées (a, b) est un vecteur normal de D.

1.5.3 Paramétrage

Proposition 18
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, un point de coordonnées (x, y) est sur $D = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$, où A est un point de coordonnées (a, b) et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (λ, μ) si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{cases}$.

Définition 15
Le système $\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** de D, de **paramètre** t.

1.5.4 Projeté orthogonal

Définition 16
Soient M un point du plan et D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle **projeté orthogonal** de M sur D le point H de D tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.
On appelle **distance** de M à D le réel $\mathrm{d}(M, D) = \inf\{MA, A \in D\}$.

Proposition 19
Soient M un point et D une droite. Alors $\mathrm{d}(M, D) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D.

Proposition 20
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soient M un point de coordonnées (x_0, y_0) et D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. On a :

$$\mathrm{d}(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.6 Cercle

Un cercle $\mathscr{C}$ est entièrement déterminé par la donnée :
⇝ d'un point A (son **centre**), et d'un réel strictement positif r (son **rayon**) ; on note :

$$\mathscr{C}(A, r) = \{M \in \mathscr{P}, AM = r\}$$

ou

⇝ de deux points qui constituent un **diamètre** (segment reliant 2 points du cercle et passant par son centre).

Proposition 21
M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Proposition 22
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point de coordonnées (x, y) est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A de coordonnées (a, b) et de rayon r si, et seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Définition 17
L'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ est appelée **équation cartésienne** de $\mathscr{C}$.

Proposition 23
Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre A, de rayon r, D une droite, et H le projeté orthogonal de A sur D.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, D) > r$, alors $D \cap \mathscr{C} = \varnothing$.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, D) < r$, alors D et $\mathscr{C}$ s'interceptent en deux points.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, D) = r$, alors $D \cap \mathscr{C} = \{H\}$. On dit alors que D est **tangente** à $\mathscr{C}$.

Proposition 24
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point de coordonnées (x, y) est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A de coordonnées (a, b) et de rayon r si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x = a + r\cos(t) \\ y = b + r\sin(t) \end{array}\right.$.

Définition 18
Le système $\left\{\begin{array}{l} x = a + r\cos(t) \\ y = b + r\sin(t) \end{array}\right.$ est appelé **représentation paramétrique** de $\mathscr{C}$, de **paramètre** t.

2 Géométrie de l'espace

On note $\mathscr{E}$ l'espace.

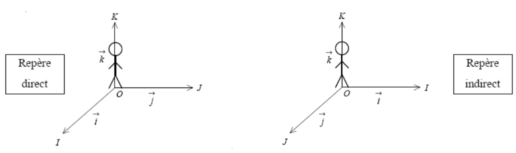
2.1 Repères de l'espace

La définition des vecteurs vue dans le plan ainsi que la somme et le produit par un scalaire se généralisent dans l'espace.
On notera encore $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition 19
Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ sont dits **coplanaires**, si les points A, B, C et D sont dans un même plan.

Proposition 25
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non colinéaires. L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{w}$ tels que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire les vecteurs de la forme $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, où a et b sont des réels. On note cet ensemble $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Définition 20
On appelle **repère cartésien de l'espace** tout quadruplet $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où $O \in \mathscr{E}$, et $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.
O s'appelle **l'origine du repère**, $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ s'appelle une **base** de $\mathscr{V}$.
Le repère (ou la base) est dit(e) **orthogonal(e)** si $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
Le repère (ou la base) est dit(e) **orthonormé(e)** si $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires.
Le repère est **orienté** suivant la règle suivante :
Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$, les pieds en O, regardant vers le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$. Le repère est **direct** si l'observateur a à sa gauche le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.
Il est **indirect** sinon.

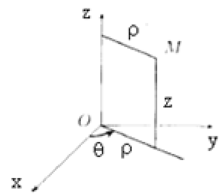


Théorème 2
Etant donné un repère $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, pour tout point $M \in \mathscr{E}$ il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

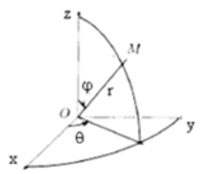
Définition 21
Le triplet (x, y, z) s'appelle **triplet de coordonnées cartésiennes** de M dans $\mathscr{R}$.
La droite (OI) telle que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ s'appelle **l'axe des abscisses**.
La droite (OJ) telle que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ s'appelle **l'axe des ordonnées**.
La droite (OK) telle que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$ s'appelle **l'axe des cotes**.
x s'appelle **l'abscisse** du point M, y s'appelle **l'ordonnée**, et z s'appelle **la cote**.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$, on appelle **coordonnées de** $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ le triplet (x, y, z) des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$.

Remarque 8
Les coordonnées d'un vecteur dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont indépendantes de l'origine du repère.

Définition 22
Soient $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace, et M de coordonnées cartésiennes (x, y, z).
- On appelle **coordonnées cylindriques** de M un triplet (ρ, θ, z) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right) + z\,\overrightarrow{k}$.



- On appelle **coordonnées sphériques** de M un triplet (r, θ, φ) tel que $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$



2.2 Produit scalaire

Définition 23
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 26
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 27
Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Proposition 28
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une <u>base orthonormée directe</u>.
On a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarque 9
Dans un repère orthonormé, si A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Définition 24
Dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormée, on appelle **norme euclidienne** d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z), encore noté $\|\overrightarrow{u}\|$, le nombre :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Proposition 29
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace, a et b des réels.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (on dit que le produit scalaire est **symétrique**)

- $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ (on dit que le produit scalaire est **bilinéaire**)

2.3 Produit vectoriel

Définition 25
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{n}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que :
$\rightsquigarrow$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$
$\rightsquigarrow$ sinon, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ est directe, et $\|\overrightarrow{n}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \,|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,|$

Remarque 10
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 30
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On a :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Proposition 31
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace orienté, a et b des réels.
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
- $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = a\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) + b\,(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$

Remarque 11
$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2.4 Produit mixte

Définition 26
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace orienté.
On appelle **produit mixte**, ou **déterminant** de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, le réel noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, ou $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, égal à $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$

Proposition 32
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Proposition 33
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ des vecteurs de l'espace orienté, a et b des réels.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$ (on dit que le produit mixte est **alterné**)
- $\left[(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}), \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\right] = a\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\right] + b\left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\right]$ (on dit que le produit mixte est **trilinéaire**)

Remarque 12
$|\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

2.5 Plans de l'espace

2.5.1 Caractérisations d'un plan

Un plan P est entièrement déterminé par la donnée :
⇝ de trois points non alignés A, B et C ; on note :

$$P = (ABC) = \{M \in \mathscr{E}, \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = 0\}$$

ou

⇝ d'un point A et de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires, appelés **vecteurs directeurs** ; on note :

$$P = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \{M \in \mathscr{E}, \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] = 0\}$$

ou

⇝ d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à tous les vecteurs directeurs de P, appelé **vecteur normal** ; on note :

$$P = A + \text{Vect}\left(\overrightarrow{n}\right)^{\perp} = \{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0\}$$

Vect $\left(\overrightarrow{n}\right)^{\perp}$ désigne l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{n}$.

2.5.2 Equation cartésienne

Proposition 34
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, si P est un plan, alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que le point de coordonnées (x,y,z) est sur P si, et seulement si $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, étant donné $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) telles que $ax+by+cz+d=0$ est un plan.

Définition 27
L'équation $ax+by+cz+d=0$ est appelée **équation cartésienne** de P.

Remarque 13
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, si le plan P a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal de P.

2.5.3 Paramétrage

Proposition 35
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, un point de coordonnées (x,y,z) est sur $P = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, où A est un point de coordonnées (a,b,c), $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non colinéaires de coordonnées respectives (α,β,γ) et (α',β',γ') si, et seulement s'il existe un couple de réels (λ,μ) tel que $\begin{cases} x = a+\lambda\alpha+\mu\alpha' \\ y = b+\lambda\beta+\mu\beta' \\ z = c+\lambda\gamma+\mu\gamma' \end{cases}$.

Définition 28

Le système $\begin{cases} x = a+\lambda\alpha+\mu\alpha' \\ y = b+\lambda\beta+\mu\beta' \\ z = c+\lambda\gamma+\mu\gamma' \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** de P, de **paramètres** λ et μ.

2.6 Droites de l'espace

2.6.1 Caractérisations d'une droite

Une droite D de l'espace est entièrement déterminée par la donnée :

$\rightsquigarrow$ de deux points distincts A et B : $D = (AB)$.

ou

$\rightsquigarrow$ d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$: $D = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$;
comme dans le plan, $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ désigne l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

ou

$\rightsquigarrow$ de deux plans non parallèles qui s'interceptent selon elle : $D = P_1 \cap P_2$

2.6.2 Système d'équations cartésiennes

Une droite de l'espace pouvant être définie comme l'intersection de deux plans, elle est entièrement déterminée par la donnée d'un **système de deux équations cartésiennes de plans non parallèles**.

Remarque 14
On considère le système de deux équations cartésiennes de plans $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$.

(a) Ce système est un système d'équations cartésiennes de droite si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées respectives (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas colinéaires ($\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} \neq \overrightarrow{0}$).

(b) Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors la droite représentée par le système est dirigée par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

2.6.3 Paramétrage

Proposition 36
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, un point de coordonnées (x,y,z) est sur $D = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$, où A est un point de coordonnées (a,b,c) et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (α,β,γ) si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x = a+\alpha t \\ y = b+\beta t \\ z = c+\gamma t \end{array}\right.$.

Définition 29

Le système $\left\{\begin{array}{l} x = a+\alpha t \\ y = b+\beta t \\ z = c+\gamma t \end{array}\right.$ est appelé **représentation paramétrique** de D, de **paramètre** t.

2.6.4 Projetés orthogonaux

Définition 30
Soient M un point de $\mathscr{E}$, D une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$, et P un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
- On appelle **projeté orthogonal de M sur D** le point H de D tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
- On appelle **distance de M à D** le réel $\text{d}(M,D) = \inf\{MA, A \in D\}$.
- On appelle **projeté orthogonal de M sur P** le point H de P tel que $\overrightarrow{MH} \in \text{Vect}(\overrightarrow{n})$.
- On appelle **distance de M à P** le réel $\text{d}(M,P) = \inf\{MA, A \in P\}$.

Proposition 37
Soient M un point de $\mathscr{E}$, D une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$, et P un plan. On a :
- $\mathrm{d}(M, D) = MH_D$ où H_D est le projeté orthogonal de M sur D.
- $\mathrm{d}(M, P) = MH_P$ où H_P est le projeté orthogonal de M sur P.

Proposition 38
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct :
- Si P est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et M est un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), alors

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Si $P = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}$$

- Si $D = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$, alors

$$\mathrm{d}(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

2.7 Sphères

Définition 31
On appelle **sphère de centre A et de rayon r**, où A est un point de l'espace et r un réel strictement positif l'ensemble

$$\mathscr{S}(A, R) = \{M \in \mathscr{E}, AM = r\}$$

Proposition 39
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, le point de coordonnées (x, y, z) est sur la sphère $\mathscr{S}$ de centre A de coordonnées (a, b, c) et de rayon r si, et seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Définition 32
L'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ est appelée **équation cartésienne** de $\mathscr{S}$.

Proposition 40
Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre A, de rayon r, P un plan, et H le projeté orthogonal de A sur P.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, P) > r$, alors $P \cap \mathscr{S} = \varnothing$.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, P) < r$, alors P et $\mathscr{S}$ s'interceptent selon le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - \mathrm{d}^2(A, P)}$.
⇝ Si $\mathrm{d}(A, P) = r$, alors $D \cap \mathscr{S} = \{H\}$. On dit alors que P est **tangent** à $\mathscr{S}$.