Feuille 16 : Séries numériques

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \sin \dfrac{1}{n^2}$

b. $u_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{n}$

c. $u_n = \mathrm{e}^{\cos(n)}$

d. $u_n = \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^n$

e. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

f. $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

g. $u_n = a^{\sqrt{n}}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

h. $u_n = n^{-\cos \frac{1}{n}}$

i. $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

j. $u_n = 1 - \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}}$

Exercice 2
Montrer que les séries suivantes convergent, et déterminer leurs sommes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-2n}\mathrm{ch}(n)$

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n(n+2)}$

d. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

e. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

f. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}2^n$

g. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{(n^2-1)n}$

h. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}$

II EXERCICES SUR LES SERIES NUMERIQUES

Exercice 3

a. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Faire une étude de fonction.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ converge, et calculer sa somme.
Télescopage, mais attention au démarrage...

Exercice 4

On considère la suite (u_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Pour tout n, on note $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

a. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Expliciter les sommes partielles de $\sum u_n$ à l'aide de celles de $\sum v_n$.

b. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

c. Montrer que sans l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ on peut avoir $\sum v_n$ convergente et $\sum u_n$ divergente.
On attend un contrexemple.

Exercice 5

On considère une série numérique $\sum u_n$.

a. Montrer que si $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent, alors $\sum u_n$ converge et que dans ce cas,
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$.
Exprimer les sommes partielles de rangs pairs et impairs à l'aide des sommes partielles de $\sum u_{2k}$ et $\sum u_{2k+1}$.

b. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (3+(-1)^n)^{-n}$.

c. Montrer que l'on peut avoir $\sum u_n$ convergente alors que $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ divergentes.
On attend un contrexemple.

Exercice 6 Séries alternées

Soit (a_n) une suite de réels positifs, strictement décroissante, de limite nulle.
On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$.

a. Montrer que les sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 7

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.
Montrer que les séries suivantes convergent :

a. $\sum \max(u_n, v_n)$ **b.** $\sum \sqrt{u_n v_n}$ **c.** $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$

Majorer les termes généraux par des combinaisons linéaires de u_n et v_n

Exercice 8 Séries de Bertrand

a. Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, avec α et β réels, en comparant à une série de Riemann si $\alpha \neq 1$ et à une intégrale si $\alpha = 1$.
Pour le cas $\alpha = 1$ il faut calculer l'intégrale à laquelle on compare la série. Une disjonction de cas apparaît sur β.

b. En déduire la nature des séries de termes généraux

$$v_n = \frac{1}{\ln(n!)} \quad \text{et} \quad w_n = n^{\frac{\ln n}{n}} - 1$$

Exercice 9 Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

✓ Si $L > 1$, alors la série diverge ;
✓ Si $L < 1$, alors la série converge ;
✓ Si $L = 1$ tout est possible.

Utiliser le fait qu'entre deux réels distincts, il en existe toujours un troisième, distinct des deux, puis appliquer un télescopage.
Pour le cas $L = 1$ on attend deux exemples contradictoires.

Exercice 10 Critère de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

✓ Si $L > 1$, alors la série diverge ;
✓ Si $L < 1$, alors la série converge ;
✓ Si $L = 1$ tout est possible.

Donner un équivalent de u_n. Attention au cas où $L = 0$ qui est à traiter à part !
Pour le cas $L = 1$ on attend deux exemples contradictoires.

Exercice 11 Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0) \Longrightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Faire un télescopage.

Exercice 12 Règle de Raabe Duhamel

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer que si $a > 1$, $\sum u_n$ converge et si $a < 1$, $\sum u_n$ diverge.

Indication : Appliquer l'exercice précédent avec $v_n = \dfrac{1}{n^b}$ pour un réel b bien choisi.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

a. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, de limite nulle.
Pour les variations étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$; pour la limite, encadrer I_n.

b. En calculant $I_{n+1} + I_n$, déterminer une expression de I_n sous la forme d'une somme.
Faire apparaître un télescopage.

c. Déduire de ce qui précède la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

LES BONS RÉFLEXES

✠ SI une série converge, ALORS son terme général tend vers 0. La réciproque est FAUSSE.

✠ On ne sait (pour l'instant) calculer la somme que de séries géométriques, télescopiques et exponentielles. Si on vous demande de calculer une somme, c'est l'un de ces cas...

✠ Dans la plupart des cas, si on demande de montrer la convergence d'une série sans en calculer la somme, on utilise un théorème de comparaison.