Feuille 14 : Integration

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer pour $x > 0$ les intégrales suivantes :

a. $I(x) = \displaystyle\int_0^x t\,(\mathrm{Artcan}(t))^2\,\mathrm{d}t$

b. $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t$

c. $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + 1}\mathrm{d}t$

Exercice 2
A l'aide des sommes de Riemann, étudier les limites des suites suivantes :

a. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

b. $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$

c. $x_n = \displaystyle\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{\frac{1}{n}}$

II EXERCICES SUR LE CALCUL INTEGRAL

Exercice 3
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$.
Montrer que f est constante sur $[a, b]$.

Exercice 4
Soient f et g deux fonctions continues, positives sur $[0, 1]$ telles que $f\,g \geq 1$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$$

Exercice 5
Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t, \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f et g sont nulles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6
Déterminer $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 7

a. Donner une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$$

b. En déduire une primitive de g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{Arctan}(x)$$

Exercice 8

Calculer une primitive sur un intervalle I des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$

b. $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Exercice 9

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a :

$$\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x \in]0, x_0[) \Longrightarrow (|f(x) - x| \leq \varepsilon\,|x|)$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = n^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$.
Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11

On considère pour tout réel strictement positif a le réel :

$$I(a) = \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\mathrm{d}x$$

a. Montrer que l'on a :

$$\forall a > 0, \quad |I(a) - I(0)| \leq \frac{a}{5}$$

b. En déduire la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers 0.

Exercice 12
Soient f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13
Soit f une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées :

a. $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$

b. $h(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$

c. $k(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$

Exercice 14
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{Arctan}(t+x^2)\mathrm{d}t$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée.

Exercice 15
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \int_0^{2x} \sqrt{2x-t}\,\cos t\mathrm{d}t$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer sa dérivée.

Exercice 16
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$

a. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

c. La fonction f prolongée par continuité en 0 est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

LES BONS REFLEXES

✠ Pour calculer les limites des sommes de Riemann, attention à prendre le "bon découpage" de intervalle sur lequel on intègre.

✠ Pour montrer une inégalité avec des intégrales, utiliser soit l'inégalité triangulaire, soit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.