

FEUILLE 14 : INTEGRATION

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Calculer pour $x > 0$ les intégrales suivantes :

- a. $I(x) = \int_0^x t (\text{Arctan}(t))^2 dt$ **A l'aide d'une IPP**
- b. $J(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ **Avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$**
- c. $K(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + 1} dt$ **Avec le changement de variable $u = e^t$**

Exercice 2

A l'aide des sommes de Riemann, étudier les limites des suites suivantes :

- a. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
- b. $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$
- c. $x_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$ **Se ramener à la somme précédente.**

II EXERCICES SUR LE CALCUL INTEGRAL

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$.

Montrer que f est constante sur $[a, b]$.

Considérer $\int (f^2 - f)^2$.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions continues, positives sur $[0, 1]$ telles que $f g \geq 1$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f\right) \left(\int_0^1 g\right) \geq 1$$

Utiliser l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f et g sont nulles sur \mathbb{R} .

Utiliser le théorème fondamental de l'intégration.

Exercice 6

Déterminer $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x t f(t) dt = 1$$

Dériver les deux membres (après avoir justifié que c'est possible !)

Exercice 7

a. Donner une primitive de f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$$

Faire une division euclidienne de polynôme.

b. En déduire une primitive de g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1} \text{Arctan}(x)$$

Faire une IPP en utilisant la question précédente.

Exercice 8

Calculer une primitive sur un intervalle I des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$

Effectuer le changement de variable : $u = \sqrt[4]{x+1}$

b. $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Effectuer le changement de variable : $t = \sqrt[3]{x}$ puis un autre...

Exercice 9

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a :

$$\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Remarquer que $\ln(b) - \ln(a) = \int_a^b \frac{1}{x} dx$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x) \ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et que l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x \in]0, x_0[) \implies (|f(x) - x| \leq \varepsilon |x|)$$

Faire un DL.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx$.

Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

faire apparaître $f(x) - x$ afin d'appliquer le a

Exercice 11

On considère pour tout réel strictement positif a le réel :

$$I(a) = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + ax^2} dx$$

a. Montrer que l'on a :

$$\forall a > 0, \quad |I(a) - I(0)| \leq \frac{a}{5}$$

Utiliser une expression conjuguée.

b. En déduire la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers 0.

Exercice 12

Soient f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} et g définie sur \mathbb{R}^* par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Utiliser le théorème fondamental de l'intégration et le théorème de Taylor Young.

Exercice 13

Soit f une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et exprimer leurs dérivées :

a. $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$ Utiliser la relation de Chasles.

b. $h(x) = \int_0^x x f(t) dt$ C'est un produit !

c. $k(x) = \int_0^x f(t+x) dt$ Faire un changement de variable.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{Arctan}(t + x^2) dt$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , puis calculer sa dérivée.

Faire un changement de variable.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \int_0^{2x} \sqrt{2x-t} \cos t dt$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^+ , puis calculer sa dérivée.

Faire un changement de variable et appliquer une formule de trigonométrie.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

- a. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
Encadrer la fonction que l'on intègre par deux fonctions que l'on sait intégrer.
- b. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
- c. La fonction f prolongée par continuité en 0 est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?

LES BONS REFLEXES

- ✂ Pour calculer les limites des sommes de Riemann, attention à prendre le "bon découpage" de l'intervalle sur lequel on intègre.
- ✂ Pour montrer une inégalité avec des intégrales, utiliser soit l'inégalité triangulaire, soit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.