Feuille 13 : Applications linéaires

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?
Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, et déterminer l'image et le noyau :

a. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (2x, x + y, 2x - 3z)$

b. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x, y, z) = (x + y, x - y, xy)$

c. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y, z) = (x + y, z)$

d. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_4(x, y) = (x + y, x - y + 1)$

e. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_5(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$

f. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_6(x, y, z) = (x + y, x - y + z, z + 2x)$

g. $f_7 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f_7(P) = P - XP'$

h. $f_8 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f_8(P) = 1 + XP'$

i. $f_9 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}2[X]$, $f_9(P) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

j. $f_{10} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f_{10}(P) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

Exercice 2
Pour chacune des matrices ci-dessous, expliciter l'application linéaire canoniquement associée, puis en déterminer l'image et le noyau :

a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Montrer que les matrices suivantes sont les matrices d'un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques :
Vérifier que $M^2 = M$ et déterminer $\text{Im}(M)$ et $\text{Ker}(M)$

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **c.** $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4
Montrer que les matrices suivantes sont les matrices d'une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques :
Vérifier que $M^2 = \mathrm{I}_3$ et déterminer $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_3)$ et $\mathrm{Ker}(M + \mathrm{I}_3)$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **c.** $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

II EXERCICES SUR LES APPLICATIONS LINEAIRES

Exercice 5
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ déterminé dans la base canonique (e_1, e_2) par

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2, \quad f(e_2) = 4e_1 - 2e_2$$

a. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
b. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6
On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ déterminé dans la base canonique (e_1, e_2) par

$$g(e_1) = e_1 + e_2, \quad g(e_2) = 2e_1 + 2e_2$$

a. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
b. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$\varphi(e_1) = f_1 - f_2 \qquad \varphi(e_2) = f_1 + f_2 \qquad \varphi(e_3) = f_1 + 2f_2$$

On ne demande que les dimensions, il n'est pas nécessaire de déterminer les sev. En trouvant le rang, on a la dimension du noyau par le théorème du rang.

Exercice 8
Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F), g \in \mathscr{L}(F, G)$ et $h \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(h \circ f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(h)$$

Montrer les deux implications. Pour montrer les égalités, il suffit de montrer une inclusion, l'autre se déduisant par symétrie.

Exercice 9
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.
Un sev F est stable par g si $x \in F \Rightarrow g(x) \in F$

Exercice 10
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

Montrer les deux implications, sachant que pour la première égalité, une inclusion est toujours vraie.

Exercice 11
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$

b. On suppose que E est de dimension finie. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

i. $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$

ii. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$

iii. $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$

Montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$(iii) $\Rightarrow$(i)

Exercice 12
Soit $u = (a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ tel que $a + b + c = 1$. On définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x, y, z) - (x + y + z)u$$

a. Montrer que f est un projecteur.

b. Préciser $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.
Il suffit d'extraire la plus grande sous-famille libre de $\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$ et utiliser le théorème du rang pour la dimension.

Exercice 13
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v des endomorphismes de E tels que :

$$E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$$

Montrer que ces sommes sont directes.
Raisonner sur les dimensions en utilisant la formule de Grassmann et le théorème du rang.

Exercice 14
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g des endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g \circ f = f \qquad \text{et} \qquad g \circ f \circ g = g$$

a. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.
Montrer que l'intersection est réduite à 0, et écrire un vecteur de E comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$ et que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$

c. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$ puis que $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$
Utiliser les questions précédentes et le théorème du rang.

Exercice 15
Soient $E = C^0(\mathbb{R})$ et $T : E \to E$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_0^x t\, f(t)\mathrm{d}t$$

a. Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$.

b. Soient $f \in E$ et $g = T(f)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g''(0)$ existe.
Utiliser le TFI et un taux d'accroissement.

c. Montrer que T est injective et non surjective.
Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 16
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u et v des endomorphismes de E. Montrer que :

a. $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$

b. $(u \circ v = u$ et $v \circ u = v) \Leftrightarrow ($ u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v))$.

Il faut à chaque fois montrer les deux implications.

Exercice 17
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u et v des endomorphismes de E. Montrer que :

a. $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
Montrer les deux implications, sachant que pour la première égalité une inclusion est toujours vérifiée.

b. $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = E$.
Montrer la double implication. Pour le sens direct, on part de $x \in E$ et on écrit $v(x) = v(u(a))$ puis on utilise $u(a)$ pour trouver la décomposition.
Pour le sens indirect une inclusion est toujours vérifiée.

Exercice 18
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u et v des projecteurs de E.

a.
i. Montrer que $(v \circ u = u) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v))$.
ii. En déduire que $(u \circ v = v \circ u$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)) \Leftrightarrow (u = v)$.

b. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.
i. Montrer que $u \circ v$ est un projecteur.
ii. Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$. Montrer la double inclusion.
iii. Montrer que $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Montrer la double inclusion.

c. On suppose que $u \circ v = v \circ u = 0$.
i. Montrer que $u + v$ est un projecteur de E.
ii. Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$
Il faut montrer $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ par double inclusion, puis que la somme directe.
iii. Montrer que $\mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. Montrer la double inclusion.

III EXERCICES SUR LES MATRICES D'APPLICATIONS LINEAIRES

Exercice 19
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et f^2.

b. Soit $\varepsilon_1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3, \varepsilon_2 = e_1$ et $\varepsilon_3 = e_1 - e_2$.
Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 20
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que $\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - \mathrm{I}_2 = 0$; en déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

b. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe au moins un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f(u) = \alpha u$.
Trouver pour quelles valeurs de α l'endomorphisme $f - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas bijectif.

c. Déterminer $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) = -u\}$ et $E_2 = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) = 2u\}$.

d. Soient $\varepsilon_1 = -e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice B de f dans cette base.

e. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21
Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3),

$$\varepsilon_1 = e_1 - e_3, \quad \varepsilon_2 = e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_3$$

a. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et expliciter la matrice de f dans cette base.

b. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ les base canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, et les vecteurs :

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f'_1 = f_1 + f_2 \quad \text{et} \quad f'_2 = f_1 - f_2$$

a. Montrer que les familles $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

b. Ecrire la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$, et la matrice de ψ dans les bases $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{B}'$.

Exercice 23
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

a. Montrer que $\big(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

b. Expliciter la matrice de f dans cette base.

Exercice 24
Soient $P_1 = (X-1)(X-2)$, $\quad P_2 = X(X-2)$, $\quad P_3 = X(X-1)$, $\quad$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(Q) = Q(0)P_1 + Q(1)P_2 + Q(2)P_3$$

a. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer la matrice de f dans cette base.

b. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de deux façons différentes.
Utiliser la définition, et la formule du changement de bases.

Exercice 25
Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$, et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

b. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection sur E parallèlement à F.
Exprimer la matrice de la projection dans une base adaptée à la somme directe, puis appliquer la formule de changement de base.

c. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie par rapport à E parallèlement à F.
Exprimer la matrice de la symétrie dans une base adaptée à la somme directe, puis appliquer la formule de changement de base.

Exercice 26
Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont semblables si, et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la première matrice. On cherche une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la seconde matrice soit la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 27

a. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle, $H = \text{Ker}(\varphi)$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Montrer que H est stable par f si, et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
Pour la première implication, si $\varphi \neq 0$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$ donc H admet un supplémentaire de dimension 1 : $H \oplus \text{Vect}\{a\} = \mathbb{R}^n$; décomposer alors x suivant cette somme et appliquer $\varphi \circ f$...

b. Déterminer les espaces stables par l'endomorphisme f canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Faire une disjonction de cas sur la dimension du sev, et utiliser la question **a** pour le cas d'un sev de dimension 2.

LES BONS REFLEXES

✠ Une matrice d'application linéaire se lit toujours en colonne. Chaque colonne correspondant à l'image d'un vecteur de la base de départ, exprimée dans la base d'arrivée.

✠ Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, on résout $f(x) = 0$ ce qui revient en dimension finie à la résolution d'une équation matricielle de la forme $AX = 0$ (où A est la matrice canoniquement associée à f).

✠ Pour déterminer l'image d'une application linéaire en dimension finie, on extrait des colonnes de la matrice canoniquement associée la plus grande sous-famille libre.

✠ Lorsque l'on connait le noyau d'une application linéaire, on connait la dimension de son image grâce au théorème du rang, et de même si l'on connait l'image, on a la dimension du noyau.