Feuille 12 : Espaces vectoriels

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels usuels ? Si oui, en donner une base et un supplémentaire :

a. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 0\}$

b. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0\}$

c. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+5y-3z=0\}$

d. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=1\}$

e. $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y-z=0 \text{ et } x+y=0\}$

f. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+yz=0\}$

g. $E_7 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y-z=0\}$

h. $E_8 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y=0 \text{ ou } 2x+z+t=0\}$

i. $E_9 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y=0 \text{ et } 2x+z+t=0\}$

j. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \widetilde{P}(0)=0\}$

k. $E_{11} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \widetilde{P}(0)=0 \text{ et } \widetilde{P}(1)=1\}$

l. $E_{12} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \widetilde{P}(1)=\widetilde{P}(-1)=0\}$

m. $E_{13} = \{P \in \mathbb{R}_3[X], \widetilde{P}(1)=\widetilde{P}(-1)=0\}$

n. $E_{14} = \{P \in \mathbb{C}_4[X], \forall x \in \mathbb{C}, \widetilde{P}(-x) = -\widetilde{P}(x)\}$

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles libres ?

a. Dans $\mathbb{R}^4$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ tels que $e_1 = (1;-1;0;1), e_2 = (0;2;-1;1), e_3 = (-2;1;-2;0)$

b. Dans $\mathbb{R}^4$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ tels que $e_1 = (1;-1;0;1), e_2 = (0;2;-1;1), e_3 = (1;-5;2;-1)$

c. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que $f_1 : x \mapsto \mathrm{ch}\,(x), f_2 : x \mapsto \mathrm{sh}\,(x), f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x$

d. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que : $f_1 : x \mapsto \mathrm{ch}\,(x), f_2 : x \mapsto \mathrm{sh}\,(x), f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$

e. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que : $f_1 : x \mapsto \ln(1+x^2), f_2 : x \mapsto \ln(1+x+x^2), f_3 : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

f. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X, X^0, X^2-1, X(X^2-1)\}$

g. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X+1, X-1, X^2-1\}$

II EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS

Exercice 3

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3, (x-y+z)^2 + (x+y+3z)^2 = 0\}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a. E est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
Dans $\mathbb{R}$ une somme de carrés est nulle si et seulement si chaque terme est nul...

b. Même question si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
... pas dans $\mathbb{C}$!

Exercice 4
Montrer que $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5
E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit $F = E \times E$ de l'addition usuelle des couples, et on définit sur F une opération externe sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x,y) \in F, \qquad (a+ib)\cdot(x,y) = (ax - by, ay + bx)$$

Montrer que F muni de ces lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Il faut vérifier tous les axiomes de la définition !

Exercice 6
Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, xy = zt = 0\}$.

a. Montrer que E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer $\text{Vect}(E)$.

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \cup G$, alors $F = E$ ou $G = E$.
Faire un raisonnement par l'absurde : si aucun des sev n'est égal à E, chacun contient un élément qui n'est pas dans l'autre.

Exercice 8
Sachant que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre d'un espace vectoriel, les familles suivantes sont-elles libres ?

a. $\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$

b. $\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, 2e_1 + e_2 - e_3\}$

c. $\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_2 - e_3\}$

Exercice 9
Soient $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ et f_1, f_2, f_3, f_4 des fonctions de E définies par :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Déterminer une base de $\text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.
Il faut trouver la plus grande sous-famille libre.

Exercice 10
Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ?

a. $\{x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x\}$

b. $\{x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin^2 x\}$

c. $\{x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x-2|, x \mapsto |x-3|\}$

Exercice 11
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (4;0;1), \quad v = (5;-1;3), \quad w = (1;1;4)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}, F = \text{Vect}\{w\}$. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 12
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (1;1;0), \quad v = (0;1;1), \quad w = (1;0;1), \quad t = (1;0;-1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}, F = \text{Vect}\{w\}$ et $G = \text{Vect}\{t\}$. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? $E \oplus G = \mathbb{R}^3$?

Exercice 13
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2;0;1), \quad v = (1;3;-2), \quad w = (5;3;0), \quad t = (0;6;-5)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}$ et $F = \text{Vect}\{w, t\}$.

a. Montrer que $E = F$.

b. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \text{Vect}\{(3;2;1;0), (4;-2;0;2), (-2;-6;-2;2)\}$$

Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
Commencer par déterminer la dimension de F.

Exercice 15
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (6;2;0;1), \quad v = (3;1;2;3), \quad a = (1,2,1,0), \quad b = (1,0,1,0)$$

a. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Même question pour la famille (a, b).

Exercice 16
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (1;0;1;0), \quad v = (0;1;-1;0), \quad w = (1;1;1;1), \quad a = (0;0;1;0), \quad b = (1,1,0,-1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{a, b\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E, F, $E + F$ et $E \cap F$? ?
Utiliser la formule de Grassman.

b. Déterminer une base de $E \cap F$.
Ecrire $\alpha u + \beta v + \gamma w = \lambda a + \mu b$ et trouver une relation entre les coefficients.

Exercice 17
Soient : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y - 3z \text{ et } z = 2t\}$
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0\}$
$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z = 0 \text{ et } t = 2x\}$

a. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, et en donner des bases.

b. Déterminer des bases de $E \cap F$, $E \cap G$ et $F \cap G$.
Si un vecteur est dans l'intersection de deux des sous-espaces vectoriels, ses composantes vérifient les équations caractéristiques de chacun des deux.

Exercice 18
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (1;1;0;-1), \quad v = (1;0;0;-1), \quad w = (1;0;-1;0)$$

On note $E = \mathrm{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + 2t = 0\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer une base de E, F, $E + F$ et $E \cap F$.

LES BONS REFLEXES

✠ Pour montrer qu'une famille est libre, écrire une combinaison linéaire nulle des vecteurs qui la composent et montrer que tous les scalaires sont nuls.

✠ Pour montrer qu'une famille est liée, trouver une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs qui la composent.

✠ Pour trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie, compléter sa base avec des vecteurs de la base canonique en s'assurant que la famille obtenue est bien libre.