

FEUILLE 12 : ESPACES VECTORIELS

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels usuels ? Si oui, en donner une base et un supplémentaire :

- a. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 0\}$
- b. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$
- c. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 5y - 3z = 0\}$
- d. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 1\}$
- e. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$
- f. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + yz = 0\}$
- g. $E_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0\}$
- h. $E_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ ou } 2x + z + t = 0\}$
- i. $E_9 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } 2x + z + t = 0\}$
- j. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(0) = 0\}$
- k. $E_{11} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(0) = 0 \text{ et } \tilde{P}(1) = 1\}$
- l. $E_{12} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$
- m. $E_{13} = \{P \in \mathbb{R}_3[X], \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$
- n. $E_{14} = \{P \in \mathbb{C}_4[X], \forall x \in \mathbb{C}, \tilde{P}(-x) = -\tilde{P}(x)\}$

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles libres ?

- a. Dans \mathbb{R}^4 : $\{e_1, e_2, e_3\}$ tels que $e_1 = (1; -1; 0; 1), e_2 = (0; 2; -1; 1), e_3 = (-2; 1; -2; 0)$
- b. Dans \mathbb{R}^4 : $\{e_1, e_2, e_3\}$ tels que $e_1 = (1; -1; 0; 1), e_2 = (0; 2; -1; 1), e_3 = (1; -5; 2; -1)$
- c. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que $f_1 : x \mapsto \operatorname{ch}(x), f_2 : x \mapsto \operatorname{sh}(x), f_3 : x \mapsto e^x$
- d. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que : $f_1 : x \mapsto \operatorname{ch}(x), f_2 : x \mapsto \operatorname{sh}(x), f_3 : x \mapsto e^{2x}$
- e. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1, f_2, f_3\}$ tels que : $f_1 : x \mapsto \ln(1+x^2), f_2 : x \mapsto \ln(1+x+x^2), f_3 : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)$
- f. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X, X^0, X^2 - 1, X(X^2 - 1)\}$
- g. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X + 1, X - 1, X^2 - 1\}$

II EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS

Exercice 3

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, (x - y + z)^2 + (x + y + 3z)^2 = 0\}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- a. E est-il un \mathbb{K} -espace vectoriel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
- b. Même question si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 4

Montrer que $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 5

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel. On munit $F = E \times E$ de l'addition usuelle des couples, et on définit sur F une opération externe sur \mathbb{C} par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in F, \quad (a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

Montrer que F muni de ces lois est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exercice 6

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, xy = zt = 0\}$.

1. Montrer que E n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer $\text{Vect}(E)$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \cup G$, alors $F = E$ ou $G = E$.

Exercice 8

Sachant que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre d'un espace vectoriel, les familles suivantes sont-elles libres ?

- a. $\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$
- b. $\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, 2e_1 + e_2 - e_3\}$
- c. $\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_2 - e_3\}$

Exercice 9

Soient $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ et f_1, f_2, f_3, f_4 des fonctions de E définies par :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Déterminer une base de $\text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Exercice 10

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ?

- a. $\{x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x\}$
- b. $\{x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin^2 x\}$
- c. $\{x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x-2|, x \mapsto |x-3|\}$

Exercice 11

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (4; 0; 1), \quad v = (5; -1; 3), \quad w = (1; 1; 4)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}$, $F = \text{Vect}\{w\}$. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 12

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (1; 1; 0), \quad v = (0; 1; 1), \quad w = (1; 0; 1), \quad t = (1; 0; -1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}$, $F = \text{Vect}\{w\}$ et $G = \text{Vect}\{t\}$. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? $E \oplus G = \mathbb{R}^3$?

Exercice 13

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (2; 0; 1), \quad v = (1; 3; -2), \quad w = (5; 3; 0), \quad t = (0; 6; -5)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v\}$ et $F = \text{Vect}\{w, t\}$.

- Montrer que $E = F$.
- Déterminer un supplémentaire de E dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 14

On considère le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 suivant :

$$F = \text{Vect}\{(3; 2; 1; 0), (4; -2; 0; 2), (-2; -6; -2; 2)\}$$

Déterminer un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 15

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs

$$u = (6; 2; 0; 1), \quad v = (3; 1; 2; 3), \quad a = (1, 2, 1, 0), \quad b = (1, 0, 1, 0)$$

- Compléter la famille (u, v) en une base de \mathbb{R}^4 .
- Même question pour la famille (a, b) .

Exercice 16

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs

$$u = (1; 0; 1; 0), \quad v = (0; 1; -1; 0), \quad w = (1; 1; 1; 1), \quad a = (0; 0; 1; 0), \quad b = (1, 1, 0, -1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{a, b\}$.

- Quelles sont les dimensions de E , F , $E + F$ et $E \cap F$?
- Déterminer une base de $E \cap F$.

Exercice 17

Soient : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y - 3z \text{ et } z = 2t\}$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z = 0 \text{ et } t = 2x\}$$

- Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 , et en donner des bases.
- Déterminer des bases de $E \cap F$, $E \cap G$ et $F \cap G$.

Exercice 18

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs

$$u = (1; 1; 0; -1), \quad v = (1; 0; 0; -1), \quad w = (1; 0; -1; 0)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + 2t = 0\}$.

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- Déterminer une base de E , F , $E + F$ et $E \cap F$.

LES BONS REFLEXES

- ✘ Pour montrer qu'une famille est libre, écrire une combinaison linéaire nulle des vecteurs qui la composent et montrer que tous les scalaires sont nuls.
- ✘ Pour montrer qu'une famille est liée, trouver une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs qui la composent.
- ✘ Pour trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie, compléter sa base avec des vecteurs de la base canonique en s'assurant que la famille obtenue est bien libre.