Feuille 11 : Polynômes

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne des polynômes A par les polynômes B dans les cas suivants :

a. $A = X^4 - 3X^3 + X^2 + X - 1$ et $B = X + 1$

b. $A = 7X^4 - 3X^3 - 2X^2 + X + 6$ et $B = X - 3$

c. $A = 7X^4 - 3X^3 - 2X^2 + X + 6$ et $B = 3X + 1$

d. $A = X^{28} + a^{28}$ et $B = X^4 - a^4$, où $a \in \mathbb{R}$.
Il sera plus rapide d'écrire $X^{28} + a^{28} = (X^4)^7 - (a^4)^7 + 2a^{28}$ et de factoriser que de poser la division !

Exercice 2
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

a. $F = \dfrac{X^2 - 5X + 4}{X - 2}$ **b.** $F = \dfrac{1}{X^2 - 1}$ **c.** $F = \dfrac{X^4 + 2X^2 + X + 1}{X^2 + 1}$ **d.** $F = \dfrac{1}{1 - X^3}$

e. $F = \dfrac{X^3}{X^2 - 4}$ **f.** $F = \dfrac{1}{X(X^2 - 1)(X + 2)}$ **g.** $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la **g.** il sera bon de revoir son cours sur les complexes...

Exercice 3
Donner la factorisation en produit de polynômes irréductibles des polynômes suivants :

a. $X^3 - X^2 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$

b. $X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 7X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$

c. $X^4 - 2\cos a X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ où $a \in \mathbb{R}$ Il y a une disjonction de cas à faire sur a...

d. $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

e. $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ Commencer par factoriser dans $\mathbb{C}$.

II EXERCICES SUR LES POLYNÔMES

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est divisible par $X(X+1)(2X+1)$.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^{n+1} - X^n - X + 1$ est divisible par $(X-1)^2$

Exercice 6
Montrer que le polynôme $X^4 + a(a+X)(a+2X)(a+3X)$ est le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7
Déterminer les réels λ et μ pour que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8
Un polynôme P divisé par $X - 1$ a pour reste $a \in \mathbb{R}$; divisé par $X - 2$, il a pour reste $b \in \mathbb{R}$.
Quel est le reste de la division de P par $(X-1)(X-2)$?

Exercice 9

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne des polynômes A par les polynômes B dans les cas suivants :

a. $A = (\sin\theta X + \cos\theta)^n$ et $B = X^2 + 1$

Si on note R le reste, on remarque qu'il est de degré au plus 1, et que $A(i) = R(i)$.

b. $A = (\sin\theta X + \cos\theta)^n$ et $B = (X^2 + 1)^2$

Ici, R est de degré au plus 3 et $A(i) = R(i)$ et $A'(i) = R'(i)$.

Exercice 10

Pour quelle(s) valeur(s) de n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

$j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2 sont les racines de $X^2 + X + 1$...

Exercice 11

Soit $P = 1 - \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X(X-1)}{2!} - \dfrac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

a. Calculer $P(k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Il faut reconnaître une formule du binôme...

b. En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de P en produit de polynômes irréductibles.

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P = X^n(1-X)^n$.

a. Déterminer la dérivée n-ème de P. Utiliser la formule de Leibniz

b. Calculer le coefficient a_n de X^n dans $P^{(n)}$ de deux façons différentes.

Pour une méthode, développer P grâce à la formule du binôme, pour l'autre utiliser la question précédente.

c. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13

A l'aide de la formule de Taylor, calculer $\displaystyle\int_0^t \frac{x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1}{(1-x)^2} \mathrm{d}x$, pour $t \in]0, 1[$.

Appliquer la formule de Taylor en 1 à $X^6 - 3X^5 + X^4 - 2X + 1$ pour simplifier la fraction rationnelle.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, donner le reste de la division euclidienne de $X^{2n} + X^n + 1$ par $(X-1)^3$.

Utiliser la formule de Taylor en 1.

Exercice 15

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$.

a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ en fonction de σ_1 et σ_2.

b. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ admettant $x_1, \cdots, x_n$ pour racines (distinctes ou non).

Montrer que $\sigma_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$. Donner une forme factorisée de P.

c. Soit $P = 2X^4 - 3X^2 + 5X - 1$. Déterminer la sommes des carrés des racines de P dans $\mathbb{C}$.

LES BONS REFLEXES

✠ Il est parfois préférable de se placer dans $\mathbb{C}[X]$ avant de revenir dans $\mathbb{R}[X]$

✠ La division euclidienne de polynômes permet de se ramener à des polynômes de degré inférieur.

✠ La formule de Taylor permet d'écrire les polynômes comme somme de puissances de polynômes de la forme $X - a$.