Feuille 10 : Géométrie

I EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DU PLAN

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct on considère les points $A(1;1), B(-1;2)$ et $C(0;1)$.

a. Déterminer une équation cartésienne des droites $(AB), (AC)$ et (BC).

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).
Utiliser un produit scalaire.

c. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{BC}$.
Utiliser un déterminant.

d. Donner la distance de A à (BC).
Utiliser la formule du cours.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct on considère les points $A(1;3)$ et $B(2;-1)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon 2.

c. Déterminer l'intersection de ces deux cercles.

Exercice 3

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

a. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Utiliser la relation de Chasles.

b. En déduire que les hauteurs d'un triangles sont concourantes.
Utiliser l'égalité précédente pour montrer que le point d'intersection de deux hauteurs est sur la troisième.

Exercice 4

Soient A et B des points du plan, I le milieu de $[AB]$ et $k \in \mathbb{R}^+$.

a. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 - MB^2 = k$$

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$

b. Montrer que pour tout point M du plan

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2$$

Introduire I par la relation de Chasles.

c. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 = k$$

Exercice 5
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point A de coordonnées $(-1;2)$ et la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=3-2t \end{array}\right.$

a. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

b. Calculer la distance de A à $\mathscr{D}$.

c. Déterminer une équation de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.

Exercice 6
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Montrer que :

$$\frac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}=\frac{CA}{\sin\left(\widehat{CBA}\right)}=\frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}$$

Exprimer le sinus à l'aide d'un déterminant.

Exercice 7
Soient $OABC$ et $OPQR$ deux carrés distincts du plan tels que O, C et P sont alignés.
Soit M le point d'intersection des droites (PA) et (BQ).
Montrer que les points R, M et C sont alignés.
Se placer dans un repère judicieusement choisi.

Exercice 8
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer l'ensemble des points équidistants des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives :

$$3x+4y-2=0 \quad \text{et} \quad -x+2y+3=0$$

II EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans l'ensemble des exercices l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Exercice 9
Soient t un réel, P_1, P_2 et P_3 les plans d'équations respectives :

$$x+ty-z+1=0, \quad (1+t)x+3y+4z-2=0 \quad \text{et} \quad y+(2t+4)z-(2t+2)=0$$

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles les trois plans contiennent une même droite.
Raisonner par analyse - synthèse.

Exercice 10
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. Déterminer :

a. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ **b.** $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$ **c.** $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}$ **d.** $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$ **e.** $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ **f.** $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$ **g.** $\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v}$

Exercice 11
On considère les points $A(1;1;1), B(1;0;-2), C(0;-1;2)$ et $D(1;2;3)$.

a. Calculer AB, AC et BC.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{BC}$.

c. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés, et déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A, B et C.

d. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

e. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à (BC).

f. Donner une représentation paramétrique de (AB).

g. Donner des équations cartésiennes de (AB).

h. Déterminer la distance de A à (BC).

i. Déterminer la distance de D à $\mathscr{P}$.

Exercice 12
On considère les points $A(3;1;2), B(1;4;2)$ et $C(1;9;0)$, et les vecteurs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

On définit le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, la droite $\mathscr{D}$ passant par B et dirigée par $\overrightarrow{u}$, et la sphère $\mathscr{S}$ de centre C et passant par A.

a. Montrer que $\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

b. Calculer la distance de C à $\mathscr{P}$. Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.

c. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$ et en déduire l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$

d. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et une équation cartésienne de $\mathscr{S}$, puis en déduire l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$.

Exercice 13
On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives : $x+y-2z-1=0$ et $2x-y+z+1=0$.
Calculer la distance du point $M(1;3;-2)$ à la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
Trouver un point et un vecteur directeur de la droite.

Exercice 14
On considère les points : $A(1;1;1), B(2;0;-1), C(0;-2;1), D\left(\frac{3\sqrt{6}}{4};\frac{3\sqrt{2}}{4};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ et $E\left(\sqrt{6};\sqrt{6};2\right)$.

a. Déterminer les coordonnées cylindriques des points A, B et C.
On passe des coordonnées cartésiennes (x,y,z) aux coordonnées cylindriques $[\rho,\theta,z]$ grâce aux relations : $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos\theta=\dfrac{x}{\rho}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho}\end{cases}$

b. Déterminer les coordonnées sphériques des points D et E.
On passe des coordonnées cartésiennes (x,y,z) aux coordonnées sphériques $[r,\theta,\varphi]$ grâce aux relations : $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{z}{r}\end{cases}$

c. Soient $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{w} = \dfrac{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}}{\sqrt{6}}$.
Montrer que $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère orthonormé de l'espace et déterminer les coordonnées de B et C dans ce repère.

Exercice 15

On considère les points $A(0;-1;2), B(2;0;-1), C(1;-2;1), D(5;0;-3)$ et $E(1;1;1)$.

a. Justifier que A, B et C définissent un plan, de même que A, D et E.

b. Montrer que D et E n'appartiennent pas au plan (ABC)

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) et du plan (ADE).

d. Déterminer l'intersection de (ABC) avec (ADE) et le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation $x + y + 1 = 0$.
Commencer par déterminer $(ABC) \cap (ADE)$, cela servira aussi dans les 2 prochaines questions.

e. Déterminer l'intersection de (ABC) avec (ADE) et le plan $\mathscr{P}_2$, d'équation $x - y + z = 0$.

f. Déterminer l'intersection de (ABC) avec (ADE) et le plan $\mathscr{P}_3$, d'équation $2x + y + z + 1 = 0$.

g. Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

Exercice 16

On considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ admettant pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Déterminer la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Voir cette droite comme l'intersection de deux plans, l'un contenant $\mathscr{D}_1$, l'autre contenant $\mathscr{D}_2$.