

## FEUILLE 10 : GÉOMÉTRIE

### I EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DU PLAN

#### Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct on considère les points  $A(1; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  et  $C(0; 1)$ .

- a. Déterminer une équation cartésienne des droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$ .
- b. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(BC)$ .
- c. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\overrightarrow{BC}$ .
- d. Donner la distance de  $A$  à  $(BC)$ .

#### Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct on considère les points  $A(1; 3)$  et  $B(2; -1)$ .

- a. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$ .
- b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre  $A$  et de rayon 2.
- c. Déterminer l'intersection de ces deux cercles.

#### Exercice 3

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés du plan.

- a. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

- b. En déduire que les hauteurs d'un triangles sont concourantes.

#### Exercice 4

Soient  $A$  et  $B$  des points du plan,  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $k \in \mathbb{R}^+$ .

- a. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$MA^2 - MB^2 = k$$

- b. Montrer que pour tout point  $M$  du plan

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2$$

- c. En déduire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 = k$$

#### Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point  $A$  de coordonnées  $(-1; 2)$  et

la droite  $\mathcal{D}$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

- a. Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .
- b. Calculer la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$ .
- c. Déterminer une équation de la perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ .

**Exercice 6**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés du plan. Montrer que :

$$\frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{CA}{\sin(\widehat{CBA})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}$$

**Exercice 7**

Soient  $OABC$  et  $OPQR$  deux carrés distincts du plan tels que  $O, C$  et  $P$  sont alignés.

Soit  $M$  le point d'intersection des droites  $(PA)$  et  $(BQ)$ .

Montrer que les points  $R, M$  et  $C$  sont alignés.

**Exercice 8**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer l'ensemble des points équidistants des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'équations respectives :

$$3x + 4y - 2 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 2y + 3 = 0$$

**II EXERCICES DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE**

Dans l'ensemble des exercices l'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Exercice 9**

Soient  $t$  un réel,  $P_1, P_2$  et  $P_3$  les plans d'équations respectives :

$$x + ty - z + 1 = 0, \quad (1+t)x + 3y + 4z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad y + (2t+4)z - (2t+2) = 0$$

Déterminer les valeurs de  $t$  pour lesquelles les trois plans contiennent une même droite.

**Exercice 10**

On considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer :

a.  $\vec{u} \cdot \vec{v}$    b.  $\vec{u} \cdot \vec{w}$    c.  $\vec{w} \cdot \vec{v}$    d.  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$    e.  $\vec{u} \wedge \vec{v}$    f.  $\vec{u} \wedge \vec{w}$    g.  $\vec{w} \wedge \vec{v}$

**Exercice 11**

On considère les points  $A(1; 1; 1), B(1; 0; -2), C(0; -1; 2)$  et  $D(1; 2; 3)$ .

- Calculer  $AB, AC$  et  $BC$ .
- Donner une représentation paramétrique de la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{BC}$ .
- Montrer que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés, et déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A, B$  et  $C$ .
- Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .
- Donner une équation cartésienne du plan passant par  $A$  et orthogonal à  $(BC)$ .
- Donner une représentation paramétrique de  $(AB)$ .
- Donner des équations cartésiennes de  $(AB)$ .
- Déterminer la distance de  $A$  à  $(BC)$ .
- Déterminer la distance de  $D$  à  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 12**

On considère les points  $A(3; 1; 2)$ ,  $B(1; 4; 2)$  et  $C(1; 9; 0)$ , et les vecteurs  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On définit le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ , la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $B$  et dirigée par  $\vec{u}$ , et la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $C$  et passant par  $A$ .

- Montrer que  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle à  $\mathcal{P}$ .
- Calculer la distance de  $C$  à  $\mathcal{P}$ .
- Déterminer le rayon de la sphère  $\mathcal{S}$  et en déduire l'intersection de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{P}$ .
- Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  et une équation cartésienne de  $\mathcal{S}$ , puis en déduire l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 13**

On considère les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équations respectives :  $x + y - 2z - 1 = 0$  et  $2x - y + z + 1 = 0$ . Calculer la distance du point  $M(1; 3; -2)$  à la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

**Exercice 14**

On considère les points :  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 0; -1)$ ,  $C(0; -2; 1)$ ,  $D \left( \frac{3\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$  et  $E(\sqrt{6}; \sqrt{6}; 2)$ .

- Déterminer les coordonnées cylindriques des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Déterminer les coordonnées sphériques des points  $D$  et  $E$ .
- Soient  $\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ ,  $\vec{v} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$  et  $\vec{w} = \frac{\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{6}}$ .  
Montrer que  $\mathcal{R} = (A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un repère orthonormé de l'espace et déterminer les coordonnées de  $B$  et  $C$  dans ce repère.

**Exercice 15**

On considère les points  $A(0; -1; 2)$ ,  $B(2; 0; -1)$ ,  $C(1; -2; 1)$ ,  $D(5; 0; -3)$  et  $E(1; 1; 1)$ .

- Justifier que  $A, B$  et  $C$  définissent un plan, de même que  $A, D$  et  $E$ .
- Montrer que  $D$  et  $E$  n'appartiennent pas au plan  $(ABC)$ .
- Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  et du plan  $(ADE)$ .
- Déterminer l'intersection de  $(ABC)$  avec  $(ADE)$  et le plan  $\mathcal{P}_1$ , d'équation  $x + y + 1 = 0$ .
- Déterminer l'intersection de  $(ABC)$  avec  $(ADE)$  et le plan  $\mathcal{P}_2$ , d'équation  $x - y + z = 0$ .
- Déterminer l'intersection de  $(ABC)$  avec  $(ADE)$  et le plan  $\mathcal{P}_3$ , d'équation  $2x + y + z + 1 = 0$ .
- Déterminer l'intersection de  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ .

**Exercice 16**

On considère les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  admettant pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Déterminer la perpendiculaire commune à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .