Feuille 9 : Analyse asymptotique

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2 x}$ Faire un quotient d'équivalents.

b. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x}$ Faire le changement de variable $h = x-1$ puis faire un quotient d'équivalents.

c. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2-3x+2)\sin(\pi\, x)}{\ln(x^2-2x+2)}$ Faire comme à la question précédente.

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ Ecrire la puissance sous forme d'une exponentielle et faire un DL du numérateur.

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2 x}$ Faire un DL du second terme.

Exercice 2
Calculer les $\mathrm{DL}_n(0)$ dans les cas suivants :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ $n=5$

b. $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ $n=1$

c. $2\mathrm{Arctan}\,(e^x)$ $n=3$

d. $(\ln(1+x))^2$ $n=4$

Exercice 3
Trouver un équivalent simple au voisinage du réel a dans les cas suivants :

a. $\dfrac{\sqrt{1+3x}}{\ln(1+x)}$ $a=0$

b. $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ $a=0$

c. $\sqrt{x}-\sqrt{\sin\ x}$ $a=0$

d. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ $a=0$ puis $a=1$

e. $\dfrac{x\ln(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $a=0$ puis $a=1$

II EXERCICES SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITES

Exercice 4
Montrer que

$$(\,(f=o_a(g))\wedge(g=O_a(u))\,) \Longrightarrow (\ f=o_a(u)\ )$$

Ecrire f et g comme des produits.

Exercice 5
Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $x \mapsto (\ln\ x)^{\ln\ x}$ et $x \mapsto (\ln\ x)^{x \ln\ x}$. Calculer $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f}{g}$.

Exercice 6
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin\ x}{x^2+x^3}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x}-\mathrm{e}^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$

d. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi\ x)$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$

f. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan\ x)^{\frac{1}{\tan(4x)}}$

Ecrire la puissance sous forme d'une exponentielle, puis faire le $\mathrm{DL}_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $\tan x$ et composer avec ln ; faire ensuite apparaître un quotient comme un taux d'accroissement.

g. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x-x}{\ln(x)\ \ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}$ Remarquer que $\ln x \underset{x \to 1}{\sim} x-1$.

h. $\lim\limits_{x \to a} \left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ Faire le changement de variable $h = x - a$.

Exercice 7
Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ dans les cas suivants :

a. $\mathrm{Arctan}^2 x \qquad n = 5$

b. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}} \qquad n = 3$

c. $\ln\dfrac{\sin x}{x} \qquad n = 4$

d. $\ln(1+\cos x) \qquad n = 4$

e. $\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x-x}{x-\ln(1+x)} \qquad n = 2$

f. $\dfrac{\mathrm{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad n = 5$ Ecrire $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

g. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad n = 2$ Ecrire la puissance sous forme d'une exponentielle.

h. $\left(\sin x - x + x^3 + x^4\right)^p \qquad n = 3p \quad$ où $p \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8
Calculer les $\mathrm{DL}_n(a)$ dans les cas suivants :
Faire des changements de variables et se ramener à des $\mathrm{DL}_n(0)$.

a. $\tan x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}, \quad n = 4$

b. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x}, \quad a = \dfrac{\pi}{2}, \quad n = 2$

c. $x^{\frac{1}{x-1}}, \quad a = 1, \quad n = 2$

Exercice 9
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (ED) suivante, en précisant le domaine sur lequel elles sont définies, puis déterminer s'il en existe qui sont définies sur $\mathbb{R}$:

$$\text{(ED)} \qquad xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

III EXERCICES D'APPLICATIONS A L'ETUDE LOCALE DE FONCTIONS

Exercice 10
On considère la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x\ln x}{x-1}$$

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et que ce prolongement, noté g, est dérivable.
Faire un $\mathrm{DL}_3(1)$ de $f(x)$.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1, ainsi que leurs positions respectives.

Exercice 11
Faire l'étude locale en 0 (limite, dérivabilité, éventuelle tangente à la courbe) des fonctions suivantes :
Faire des $\mathrm{DL}_n(0)$ des fonctions.

a. $f(x) = \dfrac{x^x - 1}{\ln(x^2+x)}$

b. $g(x) = \tan x \text{ Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$

c. $h(x) = \left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

d. $u(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\ln x}$

Exercice 12
Montrer que les courbes des fonctions suivantes admettent des asymptotes en $\pm\infty$; les déterminer et donner la position des courbes par rapport aux asymptotes :
Faire des développements asymptotiques.

a. $f(x) = x \text{ Arctan}\dfrac{x}{x-1}$

b. $g(x) = (x^2-1)\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ Vérifier que pour $x \notin \{-1,0,1\}$ on a : $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \ln\left|1-\dfrac{1}{x}\right| - \ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$

c. $h(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

d. $u(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

LES BONS REFLEXES

✠ Attention à ne pas "composer" des équivalents.

✠ Ne JAMAIS écrire un équivalent à 0. JAMAIS JAMAIS JAMAIS

✠ Pour des calculs de limites, ne pas hésiter à effectuer des DL d'ordre 2 ou 3.

✠ Si on ne "pousse" pas assez l'ordre d'un DL, le résultat est faux. Si on le "pousse" trop, c'est plus long, mais ce n'est pas faux.