Feuille 9 : Analyse asymptotique

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2 x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\mathrm{e}^{2x-1}-\mathrm{e}^x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-3x+2)\sin(\pi\, x)}{\ln(x^2-2x+2)}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}$

Exercice 2
Calculer les $\mathrm{DL}_n(0)$ dans les cas suivants :

a. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad n=5$

b. $\displaystyle\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \qquad n=1$

c. $2\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{e}^x) \qquad n=3$

d. $(\ln(1+x))^2 \qquad n=4$

Exercice 3
Trouver un équivalent simple au voisinage du réel a dans les cas suivants :

a. $\displaystyle\frac{\sqrt{1+3x}}{\ln(1+x)} \qquad a=0$

b. $\displaystyle\frac{1-\cos(2x)}{x^2} \qquad a=0$

c. $\sqrt{x}-\sqrt{\sin\, x} \qquad a=0$

d. $\displaystyle\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad a=0 \qquad \text{puis} \qquad a=1$

e. $\displaystyle\frac{x\ln(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad a=0 \qquad \text{puis} \qquad a=1$

II EXERCICES SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITES

Exercice 4
Montrer que

$$\Big(\,(f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))) \wedge (g(x) \underset{x\to a}{=} O(u(x)))\,\Big) \Longrightarrow \Big(\,f(x) \underset{x\to a}{=} o(u(x))\,\Big)$$

Exercice 5
Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $x \mapsto (\ln\, x)^{\ln\, x}$ et $x \mapsto (\ln\, x)^{x \ln\, x}$.

Exercice 6
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin\, x}{x^2+x^3}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x}-\mathrm{e}^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$

d. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi\, x)$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$

f. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan\, x)^{\frac{1}{\tan(4x)}}$

g. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-x}{\ln(x)\ \ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}$

h. $\lim\limits_{x\to a} \left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ où $a\in\mathbb{R}^*$

Exercice 7
Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ dans les cas suivants :

a. $\mathrm{Arctan}^2 x \qquad n=5$

b. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}} \qquad n=3$

c. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \qquad n=4$

d. $\ln(1+\cos x) \qquad n=4$

e. $\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x-x}{x-\ln(1+x)} \qquad n=2$

f. $\dfrac{\mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad n=5$

g. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad n=2$

h. $\left(\sin x-x+x^3+x^4\right)^p \qquad n=3p$ où $p\in\mathbb{N}^*$

Exercice 8
Calculer les $\mathrm{DL}_n(a)$ dans les cas suivants :

a. $\tan x,\quad a=\dfrac{\pi}{4},\quad n=4$

b. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x},\quad a=\dfrac{\pi}{2},\quad n=2$

c. $x^{\frac{1}{x-1}},\quad a=1,\quad n=2$

Exercice 9
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (ED) suivante, en précisant le domaine sur lequel elles sont définies, puis déterminer s'il en existe qui sont définies sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathrm{ED}) \qquad xy'+2y=\frac{x}{1+x^2}$$

III EXERCICES D'APPLICATIONS A L'ETUDE LOCALE DE FONCTIONS

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x\ln x}{x-1}$$

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et que ce prolongement, noté g, est dérivable.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1, ainsi que leurs positions respectives.

Exercice 11

Faire l'étude locale en 0 (limite, dérivabilité, éventuelle tangente à la courbe) des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{x^x - 1}{\ln(x^2+x)}$

b. $g(x) = \tan x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$

c. $h(x) = \left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

d. $u(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\ln x}$

Exercice 12

Montrer que les courbes des fonctions suivantes admettent des asymptotes en $\pm\infty$; les déterminer et donner la position des courbes par rapport aux asymptotes :

a. $f(x) = (x^2-1)\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

b. $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

d. $u(x) = x \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x-1}$

LES BONS RÉFLEXES

✠ Attention à ne pas "composer" des équivalents.

✠ Ne JAMAIS écrire un équivalent à 0. JAMAIS JAMAIS JAMAIS

✠ Pour des calculs de limites, ne pas hésiter à effectuer des DL d'ordre 2 ou 3.

✠ Si on ne "pousse" pas assez l'ordre d'un DL, le résultat est faux. Si on le "pousse" trop, c'est plus long, mais ce n'est pas faux.