

FEUILLE 8 : CALCUL MATRICIEL - SYSTÈMES LINÉAIRES

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Calculer les produits suivants :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{2}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 6x - y - 2z = 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 0 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} x + iy - z = -1 \\ ix + 2y + z = 3i + 1 \\ x - y - z = -i \end{cases}$$

Exercice 3

Inverser les matrices suivantes :

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b. } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c. } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d. } D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e. } E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{f. } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{g. } G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{h. } H = FG$$

Exercice 4

Dans les cas suivants, résoudre l'équation matricielle $AX = B$ en inversant la matrice A :

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Déterminer le rang des systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 4x + 2y + z + 3t = 0 \\ x + 6y + 3z + t = 0 \\ -2x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4t = 0 \\ x - 2y + 8z + 9t = 0 \\ -x - y + z - 3t = 0 \\ 3x + y + 3z + 13t = 0 \end{cases}$$

II EXERCICES SUR LES MATRICES

Exercice 6

- Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.
- Trouver deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB \neq BA$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -10 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que

$$A^2 - 10A + 21I_3 = 0$$

- En déduire que A , est inversible, et déterminer A^{-1} .
- Déterminer les réels a et b tels que tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale g_n telle que pour tout réel x on ait :

$$x^n = g_n(x)(x^2 - 10x + 21) + ax + b$$

(L'existence de la fonction polynomiale g_n est admise pour l'instant...)

- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (c'est-à-dire : $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = 0$).
Montrer que $I_n - A$ est inversible, et exprimer son inverse à l'aide de la matrice A .

- Vérifier le résultat précédent pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

- En déduire A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

Exercice 13

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = a_n A + b_n A^2$$

- b. Les déterminer.

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **trace** de A , et on note $\text{tr}(A)$, la somme de ses éléments diagonaux, c'est-à-dire si $A = (a_{ij})$, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- a. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$.
 b. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 c. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = A$$

Déterminer $\text{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = I_n$$

III EXERCICES SUR LES SYSTEMES**Exercice 16**

Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 8 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ x + 3y + 2z - 2t = 13 \\ -x + y - z + 4t = -2 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 17

Résoudre les systèmes suivants, en fonction des paramètres réels a, b et c :

$$\text{a. } \begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + y = b \\ x + y + z = c \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \\ x - 2y + 3z = b \\ 4x - y + 4z = c \end{cases}$$

Exercice 18

Résoudre les systèmes suivants en fonction des valeurs du paramètre λ , et en donner le rang :

$$\text{a. } \begin{cases} (1 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} \lambda x + (\lambda - 1)y + z = 2\lambda \\ x + y + \lambda z = 2\lambda \\ \lambda x + (\lambda + 1)y + z = 2\lambda \end{cases}$$

LES BONS RÉFLEXES

- ✠ Après avoir inversé une matrice M , vérifier que le résultat est bon en effectuant le produit $M^{-1}M$.
- ✠ Pour calculer une puissance de matrice, chercher une formule de récurrence après avoir calculé les premières puissances, ou penser à la formule du binôme après avoir écrit la matrice comme la somme de deux matrices qui commutent (l'une étant souvent de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$).