Feuille 8 : Calcul matriciel - Systèmes linéaires

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer les produits suivants :

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2
Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 6x - y - 2z = 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 0 \\ y - 4z = 1 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x + iy - z = -1 \\ ix + 2y + z = 3i + 1 \\ x - y - z = -i \end{cases}$

Exercice 3
Inverser les matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **f.** $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **g.** $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **h.** $H = FG$

Exercice 4
Dans les cas suivants, résoudre l'équation matricielle $AX = B$ en inversant la matrice A :

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5
Déterminer le rang des systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 4x + 2y + z + 3t = 0 \\ x + 6y + 3z + t = 0 \\ -2x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4t = 0 \\ x - 2y + 8z + 9t = 0 \\ -x - y + z - 3t = 0 \\ 3x + y + 3z + 13t = 0 \end{cases}$.

II EXERCICES SUR LES MATRICES

Exercice 6

a. Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

b. Trouver deux matrices symétriques A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB \neq BA$.

Exercice 7
Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (X - \mathrm{I}_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; Poser $X - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre un système.

Exercice 8
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
Intuiter la formule, et la montrer par récurrence .

Exercice 9
Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -10 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que

$$A^2 - 10A + 21\,\mathrm{I}_3 = 0$$

b. En déduire que A, est inversible, et déterminer A^{-1}.

c. Déterminer les réels a et b tels que tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale g_n telle que pour tout réel x on ait :

$$x^n = g_n(x)(x^2 - 10x + 21) + ax + b$$

(L'existence de la fonction polynomiale g_n est admise pour l'instant...)
On veut : $x^n = g_n(x)(x-3)(x-7) + ax + b$.
Prendre des valeurs de x qui permettent de déterminer a et b.

d. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

a. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (c'est-à-dire : $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = 0$).
Montrer que $I_n - A$ est inversible, et exprimer son inverse à l'aide de la matrice A.
Considérer $\mathrm{I}_n - A^p$

b. Vérifier le résultat précédent pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
Calculer les puissances successives de N.

b. En déduire A^n pour tout entier naturel n.
Utiliser la formule du binôme.

Exercice 12
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
Même exercice que le précédent.

Exercice 13
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = a_n\, A + b_n A^2$$

Intuiter une formule et la montrer par récurrence.

b. Les déterminer.
On étudie une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 14
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **trace** de A, et on note $\operatorname{tr}(A)$, la somme de ses éléments diagonaux, c'est-à-dire si $A = (a_{ij})$, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a. Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.

b. Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
Expliciter les éléments diagonaux des produits et vérifier l'égalité.

c. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = A$$

Déterminer $\operatorname{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire $A^p = A^{p-1}A$ et utiliser les propriétés de la trace.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = \mathrm{I}_n$$

Considérer la trace (définie dans l'exercice précédent).

III EXERCICES SUR LES SYSTEMES

Exercice 16
Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+3y+z=3 \\ 2x+y+3z=8 \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ x+3y+2z-2t=13 \\ -x+y-z+4t=-2 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y-2z=3 \\ 2x-y+4z=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

Exercice 17

Résoudre les systèmes suivants, en fonction des paramètres réels a, b et c :

a. $\begin{cases} x+2y+2z=a \\ 3x+y=b \\ x+y+z=c \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ x-2y+3z=b \\ 4x-y+4z=c \end{cases}$

Exercice 18

Résoudre les systèmes suivants en fonction des valeurs du paramètre λ, et en donner le rang :
Étudier les disjonctions de cas qui se présentent au fur et à mesure de la résolution.

a. $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=2\lambda \\ \lambda x+(\lambda+1)y+z=2\lambda \end{cases}$

LES BONS RÉFLEXES

✠ Après avoir inversé une matrice M, vérifier que le résultat est bon en effectuant le produit $M^{-1}M$.

✠ Pour calculer une puissance de matrice, chercher une formule de récurrence après avoir calculé les premières puissances, ou penser à la formule du binôme après avoir écrit la matrice comme la somme de deux matrices qui commutent (l'une étant souvent de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).