Feuille 7 : Continuité - Dérivabilité

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Etudier la limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions f suivantes (on distinguera éventuellement limite à droite et limite à gauche) :

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \qquad a = 1$

b. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}, \qquad a = 1$

c. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}, \qquad a = 3$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}, \qquad a \in \{1, 0, -1, +\infty, -\infty\}$

e. $f(x) = x^2(1 + \sin\, x), \qquad a = +\infty$

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{2x + 5}}, \qquad a \in \{2, +\infty\}$

g. $f(x) = \dfrac{\sin\, x}{\sqrt{1 - \cos\, x}}, \qquad a = 0$

h. $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}, \qquad a = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 2
Calculer les dérivées n-ème des fonctions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a. $f(x) = \sin^2 x$

b. $f(x) = x^2(1 + x)^n$

c. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

II EXERCICES SUR LA CONTINUITE

Exercice 3
Montrer à l'aide de la définition que la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4
Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Déterminer l'ensemble sur lequel f est continue.

Exercice 6
Montrer que l'équation $x^5 = x^3 + 1$ admet au moins une solution strictement positive.

III EXERCICES SUR LES LIMITES

Exercice 7
Pour un réel m fixé, on considère la fonction f_m définie par

$$f_m(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$$

a. Justifier que f est définie aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

b. Montrer que la courbe de f_m admet des asymptotes en $\pm\infty$, et les déterminer en fonction de m.

On rappelle qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote en $+\infty$ (resp.$-\infty$) à la courbe représentative d'une fonction f si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$)

Exercice 8
Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$ par

$$f(x) = \frac{(m+1)x^2 + 3x}{2x - 1}$$

Etudier les limites de f aux bornes de son domaine, en discutant suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 9
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ admettant une période et une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est constante.

Exercice 10
Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$

b. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

c. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\ln(1 - x)}$

d. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

e. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\, x - \cos\, x}{x - \frac{\pi}{4}}$

IV EXERCICES SUR LA DÉRIVATION

Exercice 11
Soient f et g des fonctions dérivables sur un intervalle I et $a \in I$.
On suppose que $f(a) = g(a) = 0$. Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(Cette propriété s'appelle règle de l'Hôpital)

Exercice 12
Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction :

$$f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1 - x^3)$$

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la dérivée n-ème de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$$

où P_n est une fonction polynomiale.

Exercice 14
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ème de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f(x) = \cos(3x)$

b. $f(x) = \cos^3 x$

c. $f(x) = \ln(x)$

d. $f(x) = x^{n-1} \ln(x)$

e. $f(x) = \cos(x)\, \mathrm{e}^x$

Exercice 15
Montrer que la fonction f suivante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 16

a. En utilisant le TAF, montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \leq x$$

b. En déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$$

Exercice 17

a. En utilisant le TAF, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

b. En déduire un encadrement indépendant de n de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

c. Montrer que la suite (S_n) converge.

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel elles sont définies, et déterminer s'il en existe qui sont définies sur $\mathbb{R}$:

a. $x^3 y' = y$

b. $x^2 y' + y = 1$

LES BONS REFLEXES

✠ DERIVABLE ⇒ CONTINUE (et pas le contraire!!!!).

✠ Pour calculer une dérivée n-ème, on transforme la fonction pour se ramener à une fonction usuelle, ou on utilise la formule de Leibniz.

✠ Pour lever une indéterminée de la forme $\dfrac{0}{0}$ en un réel, on peut se ramener à un taux d'accroissement.

✠ Pour lever une indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$, on peut factoriser.

✠ Pour montrer une inégalité, on peut utiliser l'IAF.