

## FEUILLE 6 : SUITES NUMÉRIQUES

### I EXERCICES TECHNIQUES

#### Exercice 1

Déterminer la limite éventuelle des suites  $(u_n)$  suivantes :

$$\text{a. } u_n = \frac{n^2 + 2n}{n + 1} \quad \text{b. } u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{(2n + 1)^2} \quad \text{c. } u_n = n + (-1)^n \quad \text{d. } u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\text{e. } u_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + n} \quad \text{f. } u_n = \frac{3^n - 5^n}{4^n + 7^n} \quad \text{g. } u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$\text{h. } u_n = \sin n - n \quad \text{i. } u_n = \sin(1 - (-1)^n \pi) \quad \text{j. } u_n = \sin\left(1 + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{k. } u_n = \left(2 + \frac{4}{3} \cos n\right)^{\frac{1}{n}}, n > 0 \quad \text{l. } u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{2}\right), n > 0 \quad \text{m. } u_n = \frac{1}{n^9} \sum_{k=1}^n k^7, n > 0$$

#### Exercice 2

Etudier les variations des suites suivantes :

$$\text{a. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{n + 1} \quad \text{b. } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

#### Exercice 3

Donner la forme explicite des suites suivantes :

$$\text{a. } \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 1 + \sqrt{2} \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} w_0 = 0, w_1 = 1 \\ w_{n+2} = \frac{-1}{4}w_n + w_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

#### Exercice 4

Etudier les suites suivantes (variations, limite éventuelle) :

$$\text{a. } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{on examinera les suites } (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1})).$$

## II EXERCICES SUR LES BORNES INF et SUP

### Exercice 5

Soient  $A$  et  $B$  des parties non vides de  $\mathbb{R}$ , majorées.

Montrer que  $A + B$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  et que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

### Exercice 6

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$ .

Montrer que  $\sup(A)$  et  $\inf(B)$  existent et que  $\sup(A) \leq \inf(B)$ .

### Exercice 7

Déterminer les bornes inf et sup (éventuellement infinies) des ensembles suivants :

- $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
- $B = \left\{ \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $C = \left\{ \frac{3n^2+4}{n^2+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $D = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{Z}^* \right\}$

## III EXERCICES SUR LES SUITES

### Exercice 8

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer la limite de la suite  $\left( \frac{x^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

### Exercice 9

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n \in 2\mathbb{N}$$

b. En déduire que la suite  $\left( \sin \left( (3 + \sqrt{5})^n \pi \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### Exercice 10

Etudier la convergence de la suite complexe  $(z_n)$  définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

### Exercice 11

a. Montrer que si une suite  $(x_n)$  est convergente alors la suite  $(x_{n+1} - x_n)$  converge vers 0.

b. En déduire que la suite  $(S_n)$  définie par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$  est divergente.

**Exercice 12**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Etudier la monotonie et la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- Etudier la limite des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 \quad \text{et} \quad w_n = \prod_{k=0}^n (1 - u_k)$$

**Exercice 13**

Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle des suites  $(u_n)$  suivantes :

- $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3au_n}{3u_n^2 + a}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^*$$
- $$\begin{cases} u_0 > 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 + 7u_n)} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- $$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx], \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 14**

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont rationnelles et strictement positives.
- Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- Déterminer leur limite.

**Exercice 15**

- Montrer que les suites de termes général  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  et  $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  sont adjacentes.
- En considérant l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur  $[1, 2]$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ln 2 \leq v_n$$

- Que peut-on en déduire ?

**Exercice 16**

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes dans les cas suivants :

- a. 
$$\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- b. 
$$\forall \theta \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} \\ v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n} \end{cases} \quad \text{où } \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

**Exercice 17**

Soient  $\rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in ]-\pi, \pi[$ . On considère la suite complexe  $(z_n)$  définie par :

$$\begin{cases} z_0 = \rho e^{i\theta} \\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n}$$

c. Déterminer la limite de la suite  $(z_n)$ .

**LES BONS REFLEXES**

- ✘ Pour montrer qu'un résultat est vrai "pour tout  $n$ ", penser au raisonnement par récurrence.
- ✘ Quand une suite est définie par récurrence avec une fonction décroissante, considérer les sous-suites d'indices pairs et d'indices impairs.