Feuille 6 : Suites numériques

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Déterminer la limite éventuelle des suites (u_n) suivantes :

a. $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$ **b.** $u_n = \dfrac{n^2+2n+3}{(2n+1)^2}$ **c.** $u_n = n + (-1)^n$ **d.** $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

e. $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n}$ **f.** $u_n = \dfrac{3^n - 5^n}{4^n + 7^n}$ **g.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

h. $u_n = \sin\, n - n$ **i.** $u_n = \sin(1 - (-1)^n \pi)$ **j.** $u_n = \sin\left(1 + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}\right)$

k. $u_n = \left(2 + \dfrac{4}{3}\cos n\right)^{\frac{1}{n}}$, $n > 0$ **l.** $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n > 0$ **m.** $u_n = \dfrac{1}{n^9}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^7$, $n > 0$

Exercice 2
Etudier les variations des suites suivantes :

a. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 3
Donner la forme explicite des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 5, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c. $\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 1 + \sqrt{2} \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} w_0 = 0, w_1 = 1 \\ w_{n+2} = \dfrac{-1}{4}w_n + w_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 4
Etudier les suites suivantes (variations, limite éventuelle) :

a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (on examinera les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})).

II EXERCICES SUR LES BORNES INF et SUP

Exercice 5
Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$, majorées.
Montrer que $A+B$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et que

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Utiliser la définition d'une borne sup.

Exercice 6
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in A \times B, a \leq b$.
Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
Direct.

Exercice 7
Déterminer les bornes inf et sup (éventuellement infinies) des ensembles suivants :

a. $A = \left\{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

b. $B = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ Ecrire : $\dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

c. $C = \left\{\dfrac{3n^2+4}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ Ecrire : $\dfrac{3n^2+4}{n^2+1} = 3 + \dfrac{1}{n^2+1}$

d. $D = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}, n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{Z}^*\right\}$ Etudier séparément les deux entiers.

III EXERCICES SUR LES SUITES

Exercice 8
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x| < n_0$ et majorer $\dfrac{|x|}{k}$ pour $k \geq n_0$.

Exercice 9

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n \in 2\mathbb{N}$$

Utiliser la formule du binôme.

b. En déduire que la suite $\left(\sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ecrire $\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi = 2p\pi - (3-\sqrt{5})^n\pi$

Exercice 10
Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = 1+i \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Majorer $|z_n|$ par le terme général d'une suite géométrique.

Exercice 11

a. Montrer que si une suite (x_n) est convergente alors la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0.
Utiliser l'inégalité triangulaire.

b. En déduire que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ est divergente.

Utiliser la contraposée du résultat précédent.

Exercice 12
On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Etudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n)
Le raisonnement peut être direct, ou en utilisant la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = x - x^2$.

b. Etudier la limite des suites (v_n) et (w_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \quad \text{et} \quad w_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k)$$

Faire apparaître la suite précédente.

Exercice 13
Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle des suites (u_n) suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Etudier la fonction f définie sur $[1, +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

b. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 3au_n}{3u_n^2 + a}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Etudier la fonction f définie sur $[1, +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$, ainsi que le signe de $f(x) - x$, puis faire une disjonction de cas suivant la valeur de u_0.

c. $\begin{cases} u_0 > 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + 7u_n\right)} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Procéder comme à la question précédente

d. $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, où $x \in \mathbb{R}$.

Utiliser le résultat : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Exercice 14
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

a. Montrer que (u_n) et (v_n) sont rationnelles et strictement positives.
Par récurrence

b. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Pour la monotonie de suites, étudier le signe de $u_n - v_n$; pour montrer que la différence tend vers 0, montrer que les deux suites ont le même limite.

c. Déterminer leur limite.
Considérer la suite $(u_n v_n)$.

Exercice 15

a. Montrer que les suites de termes général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ sont adjacentes.

b. En considérant l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur $[1,2]$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ln 2 \leq v_n$$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on se place sur les intervalles $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$ sur lesquels la fonction inverse est décroissante.

c. Que peut-on en déduire ?
Utiliser le théorème d'encadrement.

Exercice 16

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes dans les cas suivants :

a. $\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Procéder comme à l'exercice 14.

b. $\forall \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = 2^n \sin \dfrac{\theta}{2^n} \\ v_n = 2^n \tan \dfrac{\theta}{2^n} \end{cases}$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Pour les variations, considérer les quotients.

Exercice 17

Soient $\rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in]-\pi, \pi[$. On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = \rho e^{i\theta} \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k}$$

Par récurrence, en utilisant $e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}} 2 \cos \dfrac{x+y}{2}$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n}$$

Par récurrence en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

c. Déterminer la limite de la suite (z_n).

LES BONS REFLEXES

✠ Pour montrer qu'un résultat est vrai "pour tout n", penser au raisonnement par récurrence.

✠ Quand une suite est définie par récurrence avec une fonction décroissante, considérer les sous-suites d'indices pairs et d'indices impairs.