FEUILLE 5 : PRIMITIVES - EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes (où t désigne un réel et n un entier naturel) :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$ **3.** $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+2)e^{x+2}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,dx$ **5.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} (x^2+x)e^{2x}dx$ **6.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

7. $\displaystyle\int_0^{t} x\sqrt{1+x^2}dx$ **8.** $\displaystyle\int_0^{t} \frac{1}{1+e^x}dx$ **9.** $\displaystyle\int_1^{2} \ln(4x-1)dx$

10. $\displaystyle\int_0^{1} xe^{x^2}dx$ **11.** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x+x(\ln\, x)^2}dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^{t} \ln(1+x^2)dx$

13. $\displaystyle\int_0^{1} x\ln(1+x^2)dx$ **14.** $\displaystyle\int_0^{t} \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ **15.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{e} (1+x+x^2)e^x dx$ **17.** $\displaystyle\int_0^{2} (1-|1-x|)^3\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin^2(x)\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1+x+\sin^3(x)\right)dx$ **20.** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\ln\, x}{x^2}dx$ **21.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)dx$

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$ **23.** $\displaystyle\int_0^{t} \sin^5(x)\cos^3(x)dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^{t} \sin^2(x)\cos^4(x)dx$

25. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **27.** $\displaystyle\int_0^{t} e^{3x}\sin(5x)dx$

28. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+3x+1}{2x+3}dx$ **29.** $\displaystyle\int_1^{e} x^n\ln(x)dx$ **30.** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x+x(\ln\, x)^2}dx$

31. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx$ **32.** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$ **33.** $\displaystyle\int_1^{e} \sin(\ln(x))\,dx$

Exercice 2
Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur un intervalle I à préciser :

a. $y'+2y=x^2$

b. $y'+y=x-e^x+\cos\, x$

c. $(1+e^x)\,y'+e^x y=1+e^x$

d. $x\left(1+\ln^2(x)\right)y'+2\ln(x)y=1$

e. $(x^2+1)y'+2xy+1=0$

f. $\left(1+\cos^2 x\right)y'-\sin(2x)y=\cos(x)$

Exercice 3
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + y = 0$

b. $y'' - 3y' + 2y = 0$

c. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

d. $y'' + 2y' + 2y = \sin\, x$

II EXERCICES SUR LES PRIMITIVES

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$$

a. Calculer I_0 et I_1.
b. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
c. En déduire I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier naturel n.

Exercice 5
a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

b. En déduire une primitive de f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

c. Donner une primitive de g définie sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ par

$$g(x) = \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

Exercice 6
a. A l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

b. En déduire une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

c. Retrouver le résultat précédent en effectuant le changement de variable $x = \tan\, u$.

III EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 7

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur un intervalle I à préciser :

a. $y' = 3y + (3x+1)\mathrm{e}^{2x}$

b. $y' = 3y + \sin(3x)$

c. $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$

d. $y' + y\tan\, x = \cos^2 x$

e. $y' - y\cos\, x = \sin(2x)$

f. $y' - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}y = \mathrm{sh}(x)$

g. $(x+1)y' - 2y = \mathrm{e}^x(x+1)^3$

h. $(1+x^2)y' + y = \mathrm{Arctan}\, x$

Exercice 8

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 1$

b. $y'' - 5y' = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

c. $y'' + 6y' + 9y = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

d. $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x}$

e. $y'' + y = \sin\, x$

f. $y'' + iy = \sin x$

g. $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, où ω et ω_0 sont des réels strictement positifs.

LES BONS RÉFLEXES

✠ Les tableaux des primitives usuelles doivent être PARFAITEMENT connus.

✠ Quand on veut calculer une intégrale, on cherche d'abord une primitive de la fonction à intégrer, si on n'en trouve pas, on tente une intégration par parties, ou un changement de variable.

✠ Les équations différentielles se résolvent TOUJOURS sur des intervalles.