Feuille 5 : Primitives - Equations différentielles

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes (où t désigne un réel, et n un entier naturel) :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ Chercher une primitive
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x$ Faire une IPP
3. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+2)\mathrm{e}^{x+2}\mathrm{d}x$ Faire une IPP
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x$ Faire 2 IPP
5. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (x^2+x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ Faire 2 IPP
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ Chercher une primitive
7. $\displaystyle\int_{0}^{t} x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ Chercher une primitive
8. $\displaystyle\int_{0}^{t} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ Faire le changement de variable $u=\mathrm{e}^x$ **ou** faire apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln(4x-1)\mathrm{d}x$ Faire une IPP
10. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ Chercher une primitive
11. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$ Faire le changement de variable $u=\ln x$
12. $\displaystyle\int_{0}^{t} \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ Faire une IPP
13. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ Faire une IPP
14. $\displaystyle\int_{0}^{t} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ Faire le changement de variable $u=\mathrm{e}^x$
15. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x$ Chercher une primitive
16. $\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{e}} (1+x+x^2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ Faire deux IPP
17. $\displaystyle\int_{0}^{2} (1-|1-x|)^3\,\mathrm{d}x$ Utiliser la relation de Chasles
18. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin^2(x)\mathrm{d}x$ Linéariser $\sin^2(x)$ puis faire des IPP

19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1+x+\sin^3(x)\right) \mathrm{d}x$ Relire son cours !

20. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln\, x}{x^2}\mathrm{d}x$ Faire une IPP

21. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\mathrm{d}x$ Ecrire $\cos^5(x) = \cos^4(x)\cos(x)$ et faire apparaître des termes de la forme $u^n u'$

22. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\mathrm{d}x$ Linéariser

23. $\displaystyle\int_{0}^{t} \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$ Ecrire $\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x)$ et faire apparaître $u^n u'$

24. $\displaystyle\int_{0}^{t} \sin^2(x)\cos^4(x)\mathrm{d}x$ Linéariser

25. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ Faire le changement $x = \sin u$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ Faire le changement de variable $x = \sin u$

27. $\displaystyle\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x$ Ecrire $\sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5ix})$

28. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+3x+1}{2x+3}\mathrm{d}x$ Ecrire $\dfrac{x^2+3x+1}{2x+3} = P(x) + \dfrac{C}{2x+3}$ où P est polynômiale et $C \in \mathbb{R}$

29. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} x^n \ln(x)\mathrm{d}x$ Faire une IPP

30. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x + x\,(\ln\, x)^2}\mathrm{d}x$ Faire un changement de variable

31. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x$ Utiliser une formule de trigonométrie pour se ramener à une recherche de primitive

32. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ Faire le changement de variable $u = \sqrt{x-1}$

33. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \sin\left(\ln(x)\right) \mathrm{d}x$ Faire un changement de variable

Exercice 2

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur un intervalle I à préciser :

a. $y' + 2y = x^2$

b. $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos\, x$

c. $(1+\mathrm{e}^x)\, y' + \mathrm{e}^x y = 1 + \mathrm{e}^x$

d. $x\left(1+\ln^2(x)\right) y' + 2\ln(x) y = 1$

e. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$

f. $\left(1+\cos^2 x\right) y' - \sin(2x)y = \cos(x)$

Exercice 3
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + y = 0$

b. $y'' - 3y' + 2y = 0$

c. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

d. $y'' + 2y' + 2y = \sin\, x$

II EXERCICES SUR LES PRIMITIVES

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
Faire une IPP

c. En déduire I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier naturel n.
Faire un télescopage ou faire une démonstration par récurrence.

Exercice 5

a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

b. En déduire une primitive de f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

c. Donner une primitive de g définie sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ par

$$g(x) = \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

Faire apparaître $\tan x$ et faire une changement de variable

Exercice 6

a. A l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

b. En déduire une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

c. Retrouver le résultat précédent en effectuant le changement de variable $x = \tan\, u$.

III EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 7

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur un intervalle I à préciser :

a. $y' = 3y + (3x+1)\mathrm{e}^{2x}$

b. $y' = 3y + \sin(3x)$

c. $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$

d. $y' + y\tan\ x = \cos^2 x$

e. $y' - y\cos\ x = \sin(2x)$

f. $y' - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}y = \mathrm{sh}(x)$

g. $(x+1)y' - 2y = \mathrm{e}^x(x+1)^3$

h. $(1+x^2)y' + y = \mathrm{Arctan}\,x$

Exercice 8

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 1$

b. $y'' - 5y' = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

c. $y'' + 6y' + 9y = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

d. $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x}$

e. $y'' + y = \sin\ x$

f. $y'' + iy = \sin x$

g. $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, où ω et ω_0 sont des réels distincts.

LES BONS RÉFLEXES

✠ Les tableaux des primitives usuelles doivent être PARFAITEMENT connus.

✠ Quand on veut calculer une intégrale, on cherche d'abord une primitive de la fonction à intégrer, si on n'en trouve pas, on tente une intégration par parties, ou un changement de variable.

✠ Les équations différentielles se résolvent TOUJOURS sur des intervalles.