Feuille 4 : Généralités sur les fonctions

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Calculer, où elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ **b.** $g(x) = x^3\sin(2x) + x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\cos^2(x)$

c. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ **d.** $j(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ **e.** $k(x) = \dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$

f. $u(x) = \text{Arctan}\left(\sin(3x)\right)$ **g.** $v(x) = \ln\left(2+\sin^2\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)\right)$ **h.** $w(x) = \text{Arctan}\dfrac{1+x}{1-x}$

Exercice 2

Déterminer les valeurs suivantes :

a. $\text{Arcsin}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ **b.** $\text{Arccos}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ **c.** $\text{Arcsin}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ **d.** $\text{Arccos}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

e. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)$ **f.** $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$ **g.** $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)$ **h.** $\text{Arccos}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes, après avoir donné leur ensemble de définition :

a. $\cos\left(2\text{Arccos}\, x\right)$ **b.** $\sin\left(2\text{Arcsin}\, x\right)$ **c.** $\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\text{Arccos}\, x\right)$ **d.** $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\text{Arcsin}\, x\right)$

Exercice 4

Établir les transformations successives à appliquer à des courbes de fonctions usuelles pour obtenir les courbes des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{2+x}$ **b.** $x \mapsto x^2+x+1$ **c.** $x \mapsto 1+x-x^2$

d. $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{2x}$ **e.** $x \mapsto \dfrac{x+4}{x+3}$ **f.** $x \mapsto \dfrac{x+2}{x+3}$

Exercice 5

Donner l'expression de la fonction dont la courbe est obtenue à partir de la courbe de la fonction exponentielle, en effectuant les transformations suivantes :

a. Une translation de vecteur $\vec{i}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (Oy).

b. Une affinité de rapport 2 parallèlement à (Oy), suivie d'une translation de vecteur $\vec{i}$.

c. Une affinité de rapport 2 parallèlement à (Oy), suivie d'une translation de vecteur $\vec{j}$.

d. Une translation de vecteur $\vec{j}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (Oy).

e. Une affinité de rapport 2 parallèlement à (Ox), suivie d'une translation de vecteur $\vec{i}$.

f. Une translation de vecteur $\vec{i}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (Ox).

g. Une translation de vecteur $\vec{i}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (Ox), suivie d'une translation de vecteur $\vec{j}$.

h. Une affinité de rapport 2 parallèlement à (Ox), suivie d'une translation de vecteur $\vec{i}+\vec{j}$.

II EXERCICES SUR LES GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Exercice 6
Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle.
Selon la parité de chacune, donner la parité de leur produit fg ainsi que de la composée $f \circ g$.

Exercice 7
Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sin^2 x$

b. $g : x \mapsto (\cos(3x) + \sin(3x))^2$

Exercice 8

Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0,1] \end{cases} \end{array} \right.$

Représenter graphiquement g et $g \circ g$.

Exercice 9
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.
Raisonner par l'absurde

Exercice 10
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que f est strictement croissante. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ((f \circ f)(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = x)$$

Montrer la double implication ; pour le sens non trivial, raisonner par l'absurde.

III EXERCICES SUR LES FONCTIONS USUELLES

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(x+1)$ Vérifier le domaine de validité, puis utiliser les propriétés de ln.

b. $2^x + 6 \times 2^{-x} = 5$ Poser $X = 2^x$

c. $\sqrt[3]{x+13} + \sqrt[5]{x-13} = 4$ Montrer qu'il y a une seule solution, et la trouver.

d. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ Regrouper des termes et factoriser.

e. $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$ Prendre le logarithme.

Exercice 12
Calculer :

$$\frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

Exercice 13

a. Montrer que $\dfrac{\ln 9}{\ln 2}$ et $\sqrt{2}$ sont des irrationnels ; en déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.
Raisonner par l'absurde, puis utiliser les nombres donnés.

b. Etudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{\ln\, x}{x}$$

c. En déduire les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de l'équation $a^b = b^a$.
Voir dans quels intervalles se trouvent les entiers cherchés.

d. Montrer que $2,25^{3,375} = 3,375^{2,25}$.
Prendre le logarithme.

Exercice 14

Etudier et représenter les fonctions suivantes, après avoir réduit le domaine d'étude et simplifié leurs expressions :

a. $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$

b. $g : x \mapsto \text{Arcsin}(\cos(3x))$

Exercice 15

a. Démontrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, ab \neq 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} + k\pi$$

Prendre la tangente (après s'être assuré que l'on peut !).

b. Calculer :

$$\text{Arctan}\, 1 + \text{Arctan}\, 2 + \text{Arctan}\, 3$$

Utiliser la question précédente en regroupant intelligemment les termes et déterminer k.

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \text{Arctan}\, x$
Prendre le sinus et ne pas oublier de faire la synthèse.

b. $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$
Prendre la tangente, et ne pas oublier la synthèse.

Exercice 17

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Exprimer simplement $f(\cos(u))$ pour $u \in [0, \pi]$.
S'aider d'un cercle trigonométrique pour la disjonction de cas (il y en a 3).

c. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.
Par définition de u on a : $u = \text{Arccos}(x)$.

d. Retrouver le résultat précédent en dérivant f.
Ne pas oublier d'étudier le domaine de dérivabilité.

Exercice 18
On considère la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Exprimer simplement $f(\tan(u))$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
S'aider d'un cercle trigonométrique pour la disjonction de cas (il y en a 2).

c. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.
Par définition de u on a : $u = \text{Arctan}(x)$.

d. Retrouver le résultat précédent en dérivant f.
Ne pas oublier d'étudier le domaine de dérivabilité.

Exercice 19
On considère la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arcsin}\frac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}$$

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Exprimer simplement $f(\tan(u))$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
S'aider d'un cercle trigonométrique pour la disjonction de cas (il y en a 2).

c. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

d. Retrouver le résultat précédent en dérivant f.

Exercice 20
Simplifier pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'expression :

$$\text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Poser $x = \tan X$ et utiliser la formule de la tangente d'une somme.
Attention à la disjonction de cas pour conclure !

Exercice 21
On considère la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-\sin\ x}{1+\sin\ x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et réduire son domaine d'étude.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad \frac{1-\sin\ x}{1+\sin\ x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Partir de la tangente.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ et représenter graphiquement f.

4. Retrouver le résultat précédent en dérivant f.

LES BONS REFLEXES

✠ Toujours étudier le domaine de validité des expressions algébriques que l'on manipule.

✠ Attention les fonctions Arccos et Arcsin sont définies sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $]-1, 1[$.

✠ On a $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ que pour x dans le domaine d'arrivée de Arcsin, c'est-à-dire $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; de même $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ pour x dans le domaine d'arrivée de Arccos c'est-à-dire $x \in [0, \pi]$ et enfin $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour x dans le domaine d'arrivée de Arctan, c'est-à-dire $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.