

FEUILLE 3 : NOMBRES COMPLEXES

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = (i - 1)(2 + 3i)$ b. $z = (2 - 3i)(1 + 2i)(3 - 2i)(2 + i)$

c. $z = \frac{2 - 3i}{i}$ d. $\frac{1 - i}{1 + i} + \frac{2i}{-1 + i}$ e. $z = \frac{(1 + i)(2i + 1)}{(3 - i)(2i - 1)}$

f. $\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$ où $z \notin i\mathbb{R}$ g. $z = \frac{1 + ki}{2k + (k^2 - 1)i}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ b. $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i$ c. $z_3 = z_1 + 3z_2$

d. $z_4 = z_1^2 z_2^2$ e. $z_5 = \frac{z_1}{z_2}$ f. $z_6 = \frac{z_1}{z_3}$

g. $z_7 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$ h. $z_8 = \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i}{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i}$

j. $z_9 = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$, où $\varphi \in] -\pi, \pi[$

k. $z_{10} = \frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi}$, où $\varphi \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes, et exprimer les solutions sous forme algébrique :

a. $iz = -\sqrt{3} + i$ b. $z(1 + i) + 3 + i = 0$ c. $2z - 4i = iz + 2$

d. $3z + 2 = (1 - i)z - 7 + 13i$ e. $2z + \bar{z} = 9 + i$ f. $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a. $z^2 + 2z + 10 = 0$

b. $z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$ en remarquant que 2 est solution

c. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

Exercice 5

Développer les expressions suivantes :

a. $\cos(4x)$ b. $\sin(5x)$ c. $\cos(5x)$ d. $\cos(4x) \sin(5x)$

Exercice 6

Linéariser les expressions suivantes :

a. $\cos^3(2x)$ b. $\sin^4(3x)$ c. $\cos^2 x \sin^3 x$ d. $\cos^3 x \sin^3 x$ e. $\cos^2 x \sin^4 x$

II EXERCICES SUR LES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Exercice 7

On donne $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)$ et $z_2 = 1 + i$.

- a. Donner le module et un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

Ne pas passer à la forme algébrique.

- b. Exprimer Z sous forme algébrique.

- c. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\text{Utiliser } \begin{cases} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$$

Exercice 8

- a. Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

Utiliser $|Z|^2 = Z\bar{Z}$

- b. En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Exercice 9

Soient a et b des nombres complexes tels que $\bar{a}b \neq 1$. On pose $c = \frac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

Montrer les assertions suivantes :

- a. $(|c| = 1) \Leftrightarrow ((|a| = 1) \vee (|b| = 1))$

Utiliser $|c|^2 = c\bar{c}$.

- b. $(|c| < 1) \Leftrightarrow (((|a| < 1) \wedge (|b| < 1)) \vee (|a| > 1) \wedge (|b| > 1))$

Exercice 10

- a. Déterminer les racines carrées de $5 + 12i$.
 b. Déterminer les racines cinquièmes de i .
 c. Déterminer les racines quatrièmes de $28 + 96i$.

Prendre la racine carrée de la racine carrée.

Exercice 11

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(2z^2 - 3z + 2)^2 + (z^2 - 3z + 2)^2 = 0$$

Se ramener à deux équations du second degré, et remarquer que si z est solution de l'une, \bar{z} est solution de l'autre (ça divise le travail par deux!)

Exercice 12

On considère l'équation :

$$z^3 - (5+i)z^2 + (9+4i)z - 3(3+i) = 0 \quad (E)$$

- a. Montrer que (E) admet une solution réelle.

Considérer la partie réelle et la partie imaginaire du membre de gauche.

- b. Résoudre (E) dans \mathbb{C} .

Factoriser grâce au résultat de la question précédente.

Exercice 13

On considère l'équation :

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \quad (E)$$

- Montrer (E) admet une solution réelle.
- Résoudre (E) dans \mathbb{C} .

Exercice 14

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 2z \cos \varphi + 1 = 0$$

Utiliser une forme canonique.

Exercice 15

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation :

$$\bar{z} = jz^2$$

Considérer le module, et écrire z sous forme trigonométrique.

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}$ a et b des réels. Calculer les sommes :

$$\text{a. } C_n = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) \quad \text{b. } S_n = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$$

Calculer $C_n + iS_n$ et faire apparaître une somme géométrique.

III EXERCICES SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES**Exercice 17**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = i, z_B = 1 + i, z_C = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ et $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

Déterminer la nature des triangles ABC et ACD .

Effectuer les quotients $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$.

Exercice 18

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 8, z_B = -4 + 4i$ et $z_C = -4i$.

- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
Effectuer le quotient $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
- Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- Soient P, Q et R les milieux respectifs des segments $[A'B], [B'C]$ et $[C'A]$. Etablir la nature du triangle PQR .
Effectuer le quotient $\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}$.

Exercice 19

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1, z_B = i$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.

- Mettre z_C sous forme trigonométrique.
- Déterminer l'affixe du point C_1 , image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer l'affixe du point C_2 , image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.
- Montrer que C et C_2 sont sur un cercle de centre B .

Exercice 20

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , à tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{i-z}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

$M' \in \mathcal{C}(A, 1) \Leftrightarrow |z' - 1| = 1$; il faut ensuite interpréter les modules en terme de distances.

Exercice 21

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = \bar{z}_A$ et $z_C = 2z_B$.

- Montrer que le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre le point I d'affixe 3 et pour rayon $\sqrt{5}$.
Calculer IA, IB et IC
- Montrer que le triangle ACI est rectangle isocèle.
Calculer $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$
- Soient D l'image de O par la translation de vecteur $2\vec{IC}$ et E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que (AB) et (CE) sont perpendiculaires.
Calculer $z_{\vec{AB}}$ et $z_{\vec{CE}}$

Exercice 22

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soient A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i, z_B = \bar{z}_A, z_C = -3 - \frac{1}{4}i, z_D = 3 + 2i$, et \vec{w} le vecteur d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

- Déterminer l'affixe du point Q , image de B par la translation de vecteur \vec{w} ; l'affixe du point R , image de D par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$; l'affixe du point S , image de D par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer la nature du quadrilatère $DQRS$.
Montrer que c'est un parallélogramme, puis effectuer le quotient $\frac{z_Q - z_D}{z_S - z_D}$.
- Montrer que la droite (AD) est tangente au cercle circonscrit au triangle DQR .
Effectuer le quotient $\frac{z_A - z_D}{z_R - z_D}$.

Exercice 23

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'homothétie h de centre A d'affixe $3 - i$ de rapport $-\sqrt{2}$; la rotation r de centre B d'affixe $2i$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$; la translation t de vecteur \vec{BO} et l'application composée $s = t \circ r \circ h$. M désigne un point du plan d'affixe z .

- Exprimer à l'aide de z l'affixe de l'image de M par h .
- Exprimer à l'aide de z l'affixe de l'image de M par r .
- Déterminer le point Ω tel que $s(\Omega) = O$.

Soit on est bourrin, soit on est malin...

Exercice 24

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

- $|z| = 2|z - i|$
- Les points d'affixes $1, z$ et z^3 sont alignés.
Considérer $\frac{z^3 - 1}{z - 1}$.
- Les points d'affixes $1, z$ et z^3 forment un triangle rectangle isocèle en M .
Considérer $\frac{z^3 - z}{1 - z}$.
- $\left(\frac{z - i - 1}{iz + 1}\right)^2$ est un réel.
 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$
- $\frac{z^2}{z + i}$ est un imaginaire pur ;
 $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

LES BONS RÉFLEXES

- ✠ Dans les exercices de calcul, choisir la forme la mieux adaptée (algébrique ou trigonométrique).
- ✠ Quand on a une somme d'exponentielles complexes, penser à l'angle moitié.
- ✠ Dans les exercices de géométrie, faire un schéma à main levée.