FEUILLE 3 : NOMBRES COMPLEXES

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = (i-1)(2+3i)$ **b.** $z = (2-3i)(1+2i)(3-2i)(2+i)$

c. $z = \dfrac{2-3i}{i}$ **d.** $\dfrac{1-i}{1+i} + \dfrac{2i}{-1+i}$ **e.** $z = \dfrac{(1+i)(2i+1)}{(3-i)(2i-1)}$

f. $\dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ où $z \notin i\mathbb{R}$ **g.** $z = \dfrac{1+ki}{2k+(k^2-1)i}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ **b.** $z_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}i$ **c.** $z_3 = z_1 + 3z_2$

d. $z_4 = z_1^2 z_2^2$ **e.** $z_5 = \dfrac{z_1}{z_2}$ **f.** $z_6 = \dfrac{z_1}{z_3}$

g. $z_7 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ **h.** $z_8 = \dfrac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}$

j. $z_9 = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, où $\varphi \in]-\pi, \pi[$

k. $z_{10} = \dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}$, où $\varphi \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et exprimer les solutions sous forme algébrique :

a. $iz = -\sqrt{3} + i$ **b.** $z(1+i) + 3 + i = 0$ **c.** $2z - 4i = iz + 2$

d. $3z + 2 = (1-i)z - 7 + 13i$ **e.** $2z + \overline{z} = 9 + i$ **f.** $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 + 2z + 10 = 0$
b. $z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$ en remarquant que 2 est solution
c. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

Exercice 5
Développer les expressions suivantes :
a. $\cos(4x)$ **b.** $\sin(5x)$ **c.** $\cos(5x)$ **d.** $\cos(4x)\ \sin(5x)$

Exercice 6
Linéariser les expressions suivantes :
a. $\cos^3(2x)$ **b.** $\sin^4(3x)$ **c.** $\cos^2 x\ \sin^3 x$ **d.** $\cos^3 x\ \sin^3 x$ **e.** $\cos^2 x \sin^4 x$

II EXERCICES SUR LES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Exercice 7

On donne $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}i\right)$ et $z_2 = 1 + i$.

a. Donner le module et un argument de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

b. Exprimer Z sous forme algébrique.

c. En déduire les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 8

a. Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

b. En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Exercice 9

Soient a et b des nombres complexes tels que $\overline{a}b \neq 1$. On pose $c = \dfrac{a - b}{1 - \overline{a}b}$.

Montrer les assertions suivantes :

a. $(|c| = 1) \Leftrightarrow ((|a| = 1) \vee (|b| = 1))$

b. $(|c| < 1) \Leftrightarrow (((|a| < 1) \wedge (|b| < 1)) \vee (|a| > 1) \wedge (|b| > 1)))$

Exercice 10

a. Déterminer les racines carrées de $5 + 12i$.

b. Déterminer les racines cinquièmes de i.

c. Déterminer les racines quatrièmes de $28 + 96i$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 + \left(z^2 - 3z + 2\right)^2 = 0$$

Exercice 12

On considère l'équation :

$$z^3 - (5 + i)z^2 + (9 + 4i)z - 3(3 + i) = 0 \qquad (E)$$

a. Montrer que (E) admet une solution réelle.

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13

On considère l'équation :

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \qquad (E)$$

a. Montrer (E) admet une solution réelle.

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14
Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$$

Exercice 15
Soit $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$\overline{z} = jz^2$$

Exercice 16
Soient $n \in \mathbb{N}$ a et b des réels. Calculer les sommes :
a. $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ **b.** $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$

III EXERCICES SUR LES APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Exercice 17
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}, z_B = 1 + \mathrm{i}, z_C = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}$ et $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$.
Déterminer la nature des triangles ABC et ACD.

Exercice 18
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 8, z_B - 4 + 4\mathrm{i}$ et $z_C = -4\mathrm{i}$.

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

b. Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c. Soient P, Q et R les milieux respectifs des segments $[A'B], [B'C]$ et $[C'A]$. Etablir la nature du triangle PQR.

Exercice 19
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1, z_B = \mathrm{i}$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - \mathrm{i})$.

a. Mettre z_C sous forme trigonométrique.

b. Déterminer l'affixe du point C_1, image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c. Déterminer l'affixe du point C_2, image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3} + 2$.

d. Montrer que C et C_2 sont sur un cercle de centre B.

Exercice 20
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, à tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\mathrm{i} - z}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne au centre de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

Exercice 21

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $\quad z_B = \overline{z_A}$ $\quad$ et $z_C = 2z_B$.

a. Montrer que le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre le point I d'affixe 3 et pour rayon $\sqrt{5}$.

b. Montrer que le triangle ACI est rectangle isocèle.

c. Soient D l'image de O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$ et E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que (AB) et (CE) sont perpendiculaires.

Exercice 22

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = \dfrac{3}{2} + 6\mathrm{i}, z_B = \overline{z_A}, z_C = -3 - \dfrac{1}{4}\mathrm{i}, z_D = 3 + 2\mathrm{i}$, et $\overrightarrow{w}$ le vecteur d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

a. Déterminer l'affixe du point Q, image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$; l'affixe du point R, image de D par l'homothétie de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$; l'affixe du point S, image de D par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer la nature du quadrilatère $DQRS$.

c. Montrer que la droite (AD) est tangente au cercle circonscrit au triangle DQR.

Exercice 23

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'homothétie h de centre A d'affixe $3 - i$ de rapport $-\sqrt{2}$; la rotation r de centre B d'affixe $2i$ d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$; la translation t de vecteur $\overrightarrow{BO}$ et l'application composée $s = t \circ r \circ h$. M désigne un point du plan d'affixe z.

a. Exprimer à l'aide de z l'affixe de l'image de M par h.

b. Exprimer à l'aide de z l'affixe de l'image de M par r.

c. Déterminer le point Ω tel que $s(\Omega) = O$.

Exercice 24

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

a. $|z| = 2|z - i|$

b. Les points d'affixes $1, z$ et z^3 sont alignés.

c. Les points d'affixes $1, z$ et z^3 forment un triangle rectangle isocèle en M.

d. $\left(\dfrac{z - i - 1}{iz + 1}\right)^2$ est un réel.

e. $\dfrac{z^2}{z + i}$ est un imaginaire pur.

LES BONS RÉFLEXES

✠ Dans les exercices de calcul, choisir la forme la mieux adaptée (algébrique ou trigonométrique).

✠ Quand on a une somme d'exponentielles complexes, penser à l'angle moitié.

✠ Dans les exercices de géométrie, faire un schéma à main levée.