Feuille 2 : Calculs algébriques - Trigonométrie

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Simplifier les expressions suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (on remarquera que pour $k>0$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$)

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **d.** $\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)^2}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)^2}$

Exercice 2
Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,3]\!]^2}\frac{i!}{j!}$ **b.** $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A}2^{i+j}$, où $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j\leq 5\}$ **c.** $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq 4}(i+j)$

Exercice 3
Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x=2y \\ x-2y=2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=-1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 5x-2y+8z=5 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

Exercice 4
Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|x-1|\leq 2$ **b.**$|x^2+3x+2|\leq 2$ **c.** $|2x+3|<|4-x|$

d. $\sqrt{-x^2+2x+3}>2x-1$ **e.** $x+1\leq\sqrt{2-x}$ **f.** $\sqrt{x^2+2x-3}\leq x$

Exercice 5
Résoudre les équations suivantes :

a. $\sqrt{3}\cos x-\sin x=-1$
b. $\cos(3x)+\sin(3x)=1$
c. $\cos(2x)+\sqrt{3}\,\sin(2x)=1$
d. $\cos^2 x-\sin^2 x=0$
e. $\cos^2 x-\sin^2 x=1$
f. $2\cos^2 x-\cos x-1=0$
g. $1+\cos(2x)+\cos(4x)=0$

II EXERCICES SUR LES SOMMES ET PRODUITS

Exercice 6
Déterminer le produit des n premiers entiers pairs non nuls : $\displaystyle\prod_{1\leq k\leq n}(2k)$,

et le produit des n premiers entiers impairs : $\displaystyle\prod_{0\leq k\leq n-1}(2k+1)$

Exercice 7
Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} 2^{i+j}, \qquad$ où $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j\leq n\}, n\in\mathbb{N}^*$

b. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$ où $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice 8
Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

III EXERCICES SUR LES INEGALITES

Exercice 9
Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x-1\leq\sqrt{x+2}$

b. $\sqrt{x+1}>2-\sqrt{x}$

c. $\sqrt{x^2+3x-4}\leq 2-\dfrac{1}{2}x$

d. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$

e. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}$

f. $\sqrt{x^2+4}\leq\left|\sqrt{|x|}-2\right|$

Exercice 10
Résoudre les inéquations suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m :

a. $\dfrac{x-m}{m-2}>3-x$

b. $\dfrac{m}{x-1}>\dfrac{1}{x}$

c. $\sqrt{x+m}<3m-x$

Exercice 11
On donne : $-2\leq x\leq 3$ et $-1\leq y<0$.
Donner les meilleurs encadrements de $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice 12
Montrer que

$$\forall (x,y)\in]-1,1[^2, \qquad -1<\frac{x+y}{1+xy}<1$$

Exercice 13
Le plan étant muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $\left| |x+y| - |x-y| \right| \leq 2$.

Exercice 14
Résoudre l'équation $|x+y| + y = |x-y| - y$ et représenter graphiquement les solutions.

Exercice 15
Soient a et b des réels strictement positifs tels que $b \leq a$.
Classer dans l'ordre croissant a, b, leurs moyennes arithmétiques $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$, géométrique $m_2 = \sqrt{ab}$ et harmonique m_3 telle que $\dfrac{2}{m_3} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Exercice 16
Montrer les résultats suivants :

a. $\forall (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \left\lfloor \dfrac{m+n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

IV EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE

Exercice 17
Montrer que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{\cos(2t)}{1 + \sin(2t)}$$

Exercice 18
Soient $(a,b) \neq (0,0), \omega \in \mathbb{R}$, et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

a. Montrer qu'il existe $\varphi \in [-\pi, \pi]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega x - \varphi)$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

i. $\sin x - \cos x \geq 1$

ii. $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1$

Exercice 19

a. Montrer que pour tous réels a et b :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

b. Résoudre les équations suivantes :

i. $\cos(3x) - \cos(5x) = \sin(6x) + \sin(2x)$

ii. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) = 0$

Exercice 20

Exprimer ...

a. $(\cos x + \sin x)^2$ ... en fonction de $\sin(2x)$

b. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} + \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$ ... en fonction de $\cos(2x)$

c. $\sin x, \cos x, \tan x$ et $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ ... en fonction de $\tan \dfrac{x}{2}$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos(2x)} = 1$$

Exercice 22

Donner la valeur exacte de

$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}}$$

Exercice 23

a. Vérifier que pour tous réels a et b :

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

b. Montrer l'égalité : $2 \sin \dfrac{\pi}{7} \left(\cos \dfrac{\pi}{7} + \cos \dfrac{3\pi}{7} + \cos \dfrac{5\pi}{7} \right) = \sin \dfrac{6\pi}{7}$

c. En déduire la valeur exacte de : $\cos \dfrac{\pi}{7} - \cos \dfrac{2\pi}{7} + \cos \dfrac{3\pi}{7}$

Exercice 24

a. Vérifier que pour tous réels a et b,

$$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

b. On suppose que $a + b + c = \pi$. Montrer que $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \dfrac{a}{2} \cos \dfrac{b}{2} \cos \dfrac{c}{2}$

c. On suppose que $a + b + c = \pi$. Montrer que $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \ \tan b \ \tan c$

LES BONS REFLEXES

✠ Avant de résoudre une inéquation, toujours étudier le domaine de validité de l'expression.

✠ Avoir toujours en tête que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$