Feuille 1 : Raisonnement - Vocabulaire ensembliste

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Donner la négation des phrases suivantes :

a. $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na < b$

b. $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B)$

c. $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$

d. $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Exercice 2
Soit f une fonction réelle. Traduire par la phrase la plus concise possible les propositions suivantes :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

c. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

Exercice 3
On considère la tautologie A suivante :
"Quand je suis en cours, mon téléphone portable est éteint."
On note C l'assertion "je suis en cours" et P l'assertion "mon portable est allumé".

a. Donner un équivalent de A à l'aide de C, P et des opérateurs logiques.

b. Donner la contraposée de l'assertion A.

c. Donner la réciproque de l'assertion A.

d. Dans les cas suivants, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis des tautologies telles que $P \vee \rceil P$ ou $C \vee \rceil C$, ...) :
✓ Je suis en cours
✓ Mon portable sonne

Exercice 4
f désigne une fonction réelle de la variable réelle (c'est-à-dire définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$).
Traduire les propriétés suivantes à l'aide des quantificateurs :

a. f ne prend que des valeurs entières

b. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$

c. f n'est pas strictement décroissante

d. f admet un maximum

e. f n'admet pas d'extremum

f. f est de signe constant

Exercice 5
Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les propriétés suivantes à l'aide des quantificateurs :

a. (u_n) est croissante

b. (u_n) est croissante à partir d'un certain rang

c. (u_n) diverge vers $+\infty$

d. (u_n) est périodique

e. (u_n) converge vers un réel L

f. (u_n) est majorée

g. (u_n) n'est pas minorée

Exercice 6
A l'aide d'une table de vérité, montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

a. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Longleftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r)$

b. $\rceil\, (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \rceil q)$

c. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

Exercice 7
Soient a un réel et f une fonction réelle de la variable réelle.
Donner la négation, la réciproque et la contraposée de l'assertion suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) \geq 0) \Longrightarrow (a \geq 0)$$

Exercice 8
Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments x de E. Compléter à l'aide des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ et justifier :

a. $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \quad \cdots \quad ((\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)))$

b. $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \quad \cdots \quad ((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)))$

II EXERCICES SUR LE RAISONNEMENT

Exercice 9
Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.
Faire une démonstration par l'absurde.

Exercice 10

a. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $5^{2n} - 1$ est un multiple de 24.
Faire une démonstration par récurrence.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $11^{n+1} - 10n - 11$ est un multiple de 100.
Faire une démonstration par récurrence.

c. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n + 1 \leq 2^n$.
Faire une démonstration par récurrence ; on sera amené à montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} + 1 \leq 2^n$

Exercice 11

a. Montrer que si p est un nombre premier supérieur à 5, alors $p^2 - 1$ est un multiple de 24.
Partir de p premier, $p \neq 2$ pour montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 8, puis de p premier, $p \neq 3$ pour montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 3.

b. Réciproquement, si $p^2 - 1$ est un multiple de 24, p est-il premier ?
Trouver un contrexemple.

III EXERCICES SUR LES ENSEMBLES ET LES APPLICATIONS

Exercice 12
Montrer que
$$(\,(A \cap B) \subset (A \cap C)\,) \wedge (\,(A \cup B) \subset (A \cup C)\,) \Rightarrow (B \subset C)$$
Faire une disjonction de cas pour $x \in B$: soit $x \in A$ soit $x \notin A$.

Exercice 13
Montrer que
$$(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B)$$
Le sens direct est trivial. Pour le sens indirect, montrer la contraposée.

Exercice 14
L'implication suivante est-elle vraie ?
$$(\,A \cap (B \cup C) = A \cap B) \Rightarrow (A \cap C = \varnothing)$$
Trouver un contrexemple.

Exercice 15
Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :
Pour montrer l'injectivité ou la surjectivité utiliser la définition. Pour montrer la non injectivité et la non surjectivité trouver des contrexemples.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ injectif, non surjectif

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \right.$ ni injectif, ni surjectif

c. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ bijectif

d. $v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y) \end{array} \right.$ ni injectif, ni surjectif

Exercice 16
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :
$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

a. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

b. Expliciter $f \circ g$ et $g \circ f$, puis étudier leur injectivité et leur surjectivité.

Exercice 17

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

a. Montrer que f établit une bijection entre $\mathbb{R}$ et une partie J de $\mathbb{R}$ à préciser.
Pour la surjectivité, faire une disjonction de cas sur le signe de l'antécédent éventuel.

b. Expliciter f^{-1} sur J.

Exercice 18

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Montrer que :

a. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
Montrer que f est bijective et écrire $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$.

b. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
Montrer que f est bijective et écrire $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$.

Exercice 19

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

a. f surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f\left(f^{-1}(B)\right) = B$
Se montre par double implication. Pour le sens direct, d'après le cours, on a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$, il suffit donc de montrer l'autre inclusion.
Pour le sens indirect prendre $B = F$.

b. f injective $\Rightarrow \forall A \subset E, f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
Faire un raisonnement par l'absurde.

c. f surjective $\Rightarrow \forall A \subset E, \overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$

Exercice 20

Soient $f : E \to F$ une application, A une partie de E, x et y des éléments de E, z un élément de F.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Si une affirmation est vraie, le démontrer, si elle est fausse exhiber un contrexemple puis ajouter une hypothèse sur f pour qu'elle devienne vraie.

a. $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$
Faux

b. $f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$
Vrai

c. $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
Faux

d. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$
Vrai

e. $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$
Faux

f. $z \notin f(A) \Rightarrow z \in f\left(\overline{A}\right)$
Faux

g. $z \in f\left(\overline{A}\right) \Rightarrow z \notin f(A)$
Faux

LES BONS REFLEXES

✠ Pour montrer une équivalence, on montre les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$:

$$(P \Leftrightarrow Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

✠ Pour montrer que deux ensemble sont égaux, on montre les deux inclusions $\subset$ et $\supset$:

$$(A = B) \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

✠ Pour montrer que $A \subset B$, on prend $x \in A$ et on montre que $x \in B$:

$$(A \subset B) \iff (\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

✠ Pour montrer que f est injective, on prend x et y tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

✠ Pour montrer que f est surjective de E dans F, on prend $y \in F$ et on montre qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.