

FEUILLE 0 : RÉVISIONS

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- a. $4(x+1) - 3x(x+1) + (x+1)(5x-7)$
- b. $4x^2 + 4x - 3$
- c. $2x^2 - 4$
- d. $3x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$
- e. $9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$
- f. $x^2 - e$
- g. $x^2 - x^4$
- h. $(3-3x)(2x-5) + 4x - 10 - 2x(2x-5)$
- i. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(3x + \frac{1}{3}\right)^2$
- j. $x(x-2) + 3x^2 - 12$
- k. $(4x+1)(x-1) + \left(\frac{1}{4}x+4\right)(1-x) - 2x(x-1)$
- l. $4x^2 - 4x + 1 + (x+2)(2x-1)$
- m. $-1 + (1+x-x^2)^2$
- n. $(x^2+2x-8)(x+1) + (x^2+2x+1)(x-2)$
- o. $(x-2)(x^3-1) - x^2(x^2-3x+2)$
- p. $x^6 - 1$
- q. $x^6 - 7x^3 - 8$

Exercice 2

Simplifier le réel A dans les cas suivants :

- a. $A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} \times \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$
- b. $A = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}} - \frac{2 + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{2} - \frac{1}{\frac{3}{2}}$
- c. $A = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}}$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$
- d. $A = \sqrt{27} \times e^{-\frac{1}{2} \ln 3} \times \sqrt{e^{-2 \ln 2}}$
- e. $A = \frac{27^n \times 2 \times 4^n \times 3^{n-1}}{3 \times 2^{n+2} \times 9^n}$ où $n \in \mathbb{N}$
- f. $A = 2^{n+1} - 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$
- g. $A = 4^{n+1} + 3 \times (2^n)^2 - 7 \times 2^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$
- h. $A = \frac{\ln(12) - 3 \ln(2)}{2 \ln(3) - \ln(6)}$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = 0$

b. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = 0$

c. $\ln(x+6) - \ln(x+2) = \ln(x)$

d. $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$

e. $\sqrt{x+8} - 2\sqrt{x} = 1$

f. $\sqrt{x^2+x+1} = 2x+1$

g. $x^x = 1$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

b. $(x^2 - 4)(2x^2 + 5x - 3) \leq 0$

c. $\frac{x-7}{x-2} \leq \frac{-7x+1}{x+2}$

d. $(x+1)^2 > (x^2 + 2x - 1)^2$

e. $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1} > 1$

Exercice 5

Dériver les fonctions suivantes, où elles sont dérivables :

a. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

b. $x \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 2x}$

c. $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

d. $x \mapsto x \ln x e^x$

e. $x \mapsto \ln(1 + e^{x^2})$

f. $x \mapsto \ln(\ln x)$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^1 (t^3 + 3t^2 - t + 2) dt$

b. $\int_0^{-\frac{1}{3}} (3t+1)^3 dt$

c. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2t+1}} dt$

d. $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$

e. $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$

f. $\int_1^e t \ln t$

II EXERCICES DE REVISIONS

Exercice 7

a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$e^x \geq x + 1$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur à 2 on a :

$$1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq e^{-\frac{1}{n}}$$

c. Puis que pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 8

On considère la suite de Lucas (L_n) définie par :

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

On note $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

a. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis que $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = \varphi^n + \frac{(-1)^n}{\varphi^n}$$

Exercice 9

On considère la famille (f_k) de fonctions définies sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = x^k \ln(1+x)$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note h_k la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$h_k(x) = k \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

a. Etudier les variations et le signe des fonctions h_k .

b. Etudier les variations des fonctions f_k pour $k \geq 2$, ainsi que les limites aux bornes.

Exercice 10

On considère l'ensemble \mathcal{F} des fonctions f définies sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* vérifiant :

- f est dérivable en 1
- pour tous réels strictement positifs x et y , $f(xy) = f(x)f(y)$

Soit $f \in \mathcal{F}$.

a. Etablir que $f(1) = 1$.

b. Soient $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in] -x_0, +\infty[$. Montrer que :

$$f(x_0 + k) - f(x_0) = f(x_0) \left(f\left(1 + \frac{k}{x_0}\right) - f(1) \right)$$

- c. Dédurre de ce qui précède que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$

- d. Que dire de la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = \ln(f(x)) - f'(1) \ln x$$

- e. Expliciter l'ensemble \mathcal{F} .

Exercice 11

L'entier n étant au moins égal à 3, on note g_n la fonction définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = (x - n) \ln x - x \ln(x - n)$$

- a. Résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation : $p + 1 < \sqrt{2}p$; en déduire que pour tout $p \geq 5$, $p^2 < 2^p$.
 b. Déterminer les signes de $g_n(n + 1)$ et $g_n(n + 2)$.
 c. Etudier les variations de g_n .
 d. Déterminer la limite de g_n lorsque x tend vers n .
 e. En remarquant que pour tout $x > n$,

$$g_n(x) = -n \ln(x) - x \ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$$

déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

- f. Démontrer que pour $n \geq 3$ l'équation

$$x^{x-n} = (x - n)^x$$

a une seule solution notée x_n .

- g. Démontrer que pour $n \geq 3$ on a :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{\ln(x_n - n)}{x_n - n}$$

- h. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

- i. En utilisant la question **b**, montrer que pour $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{\ln(x_n - n)}{2} \leq \frac{\ln(x_n - n)}{x_n - n}$$

- j. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n)$.

Exercice 12

Soit la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

- a. Calculer $\int_0^1 t^{p-1} dt$, où p est un entier naturel supérieur à 2.
 b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 + t} dt$$

puis que :

$$|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$$

- c. Conclure quant à la convergence et la limite de la suite (S_n) .