Feuille 0 : Révisions

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

a. $4(x+1)-3x(x+1)+(x+1)(5x-7)$

b. $4x^2+4x-3$

c. $2x^2-4$

d. $3x^2+\dfrac{5}{4}x-\dfrac{1}{2}$

e. $9x^2-6\sqrt{2}x+2$

f. $x^2-\mathrm{e}$

g. x^2-x^4

h. $(3-3x)(2x-5)+4x-10-2x(2x-5)$

i. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(3x+\dfrac{1}{3}\right)^2$

j. $x(x-2)+3x^2-12$

k. $(4x+1)(x-1)+\left(\dfrac{1}{4}x+4\right)(1-x)-2x(x-1)$

l. $4x^2-4x+1+(x+2)(2x-1)$

m. $-1+(1+x-x^2)^2$

n. $(x^2+2x-8)(x+1)+(x^2+2x+1)(x-2)$

o. $(x-2)(x^3-1)-x^2(x^2-3x+2)$

p. x^6-1

q. x^6-7x^3-8

Exercice 2
Simplifier le réel A dans les cas suivants :

a. $A=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}\times\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}$

b. $A=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}-\dfrac{2+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{2}-\dfrac{1}{\frac{3}{2}}$

c. $A=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$ où $x\in\mathbb{R}_+^*$

d. $A=\sqrt{27}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}\times\sqrt{\mathrm{e}^{-2\ln 2}}$

e. $A=\dfrac{27^n\times 2\times 4^n\times 3^{n-1}}{3\times 2^{n+2}\times 9^n}$ où $n\in\mathbb{N}$

f. $A=2^{n+1}-2^n$ où $n\in\mathbb{N}$

g. $A=4^{n+1}+3\times(2^n)^2-7\times 2^{2n}$ où $n\in\mathbb{N}$

h. $A=\dfrac{\ln(12)-3\ln(2)}{2\ln(3)-\ln(6)}$

Exercice 3
Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-1} = 0$

b. $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} = 0$

c. $\ln(x+6) - \ln(x+2) = \ln(x)$

d. $2\mathrm{e}^{4x} - 5\mathrm{e}^{2x} + 2 = 0$

e. $\sqrt{x+8} - 2\sqrt{x} = 1$

f. $\sqrt{x^2+x+1} = 2x+1$

g. $x^x = 1$

Exercice 4
Résoudre les inéquations suivantes :

a. $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

b. $(x^2-4)(2x^2+5x-3) \leq 0$

c. $\dfrac{x-7}{x-2} \leq \dfrac{-7x+1}{x+2}$

d. $(x+1)^2 > (x^2+2x-1)^2$

e. $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1} > 1$

Exercice 5
Dériver les fonctions suivantes, où elles sont dérivables :

a. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}$

b. $x \mapsto \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-2x}$

c. $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$

d. $x \mapsto x \ln x \, \mathrm{e}^x$

e. $x \mapsto \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x^2}\right)$

f. $x \mapsto \ln(\ln x)$

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 (t^3 + 3t^2 - t + 2)\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_0^{-\frac{1}{3}} (3t+1)^3 \mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t \ln t$

II EXERCICES DE REVISIONS

Exercice 7

a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$e^x \geq x+1$$

Faire une étude de fonction

b. En déduire que pour tout un entier naturel n supérieur à 2 on a :

$$1+\frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} \qquad \text{et} \qquad 1-\frac{1}{n} \leq e^{-\frac{1}{n}}$$

c. Puis que pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 8

On considère la suite de Lucas (L_n) définie par

$$\begin{cases} L_0 = 2,\ L_1 = 1 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{pour tout } \ n \geq 0 \end{cases}$$

On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

a. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis que $\dfrac{1}{\varphi^2} = 1 - \dfrac{1}{\varphi}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = \varphi^n + \frac{(-1)^n}{\varphi^n}$$

Faire une récurrence forte

Exercice 9

On considère la famille (f_k) de fonctions définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = x^k \ln(1+x)$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note h_k la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$h_k(x) = k\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

a. Etudier les variations et le signe des fonctions h_k.

b. Etudier les variations des fonctions f_k pour $k \geq 2$, ainsi que les limites aux bornes.
Faire une disjonction de cas selon la parité de k.

Exercice 10

On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

- f est dérivable en 1
- pour tous réels strictement positifs x et y, $f(xy) = f(x)f(y)$

Soit $f \in \mathscr{F}$.

a. Etablir que $f(1) = 1$.

b. Soient $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in]-x_0,+\infty[$. Montrer que :

$$f(x_0+k) - f(x_0) = f(x_0)\left(f\left(1+\frac{k}{x_0}\right) - f(1)\right)$$

c. Déduire de ce qui précède que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$

Etudier le taux d'accroissement.

d. Que dire de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \ln(f(x)) - f'(1)\ln x$$

Montrer que g est constante.

e. Expliciter l'ensemble $\mathscr{F}$

Exercice 11

L'entier n étant au moins égal à 3, on note g_n la fonctions définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = (x-n)\ln x - x\ln(x-n)$$

a. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $p+1 < \sqrt{2}p$; en déduire que pour tout $p \geq 5$, $p^2 < 2^p$.
Pour la deuxième inégalité, faire une récurrence.

b. Déterminer les signes de $g_n(n+1)$ et $g_n(n+2)$.

c. Etudier les variations de g_n.
Dériver 2 fois.

d. Déterminer la limite de g_n lorsque x tend vers n.

e. En remarquant que pour tout $x > n$,

$$g_n(x) = -n\ln(x) - x\ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$$

déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

f. Démontrer que pour $n \geq 3$ l'équation

$$x^{x-n} = (x-n)^x$$

a une seule solution notée x_n.

g. Démontrer que pour $n \geq 3$,

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{\ln(x_n - n)}{x_n - n}$$

h. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

i. En utilisant la question **b**, montrer que pour $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{\ln(x_n - n)}{2} \leq \frac{\ln(x_n - n)}{x_n - n}$$

Montrer séparément les deux inégalités, et utiliser le signe de g_n pour la seconde.

j. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n)$.
Utiliser les questions **g** et **h**.

Exercice 12
Soit la suite (S_n) définie par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

a. Calculer $\int_0^1 t^{p-1}\mathrm{d}t$, où p est un entier naturel supérieur à 2.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$$
puis que :
$$|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$$

c. Conclure quant à la convergence et la limite de la suite (S_n).