TD 20 - Probabilités

1. Les fonctions suivantes définissent-elles une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

a. $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^k}$

NON, car $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$ est une série géométrique convergente, mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \neq 1$.

b. $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$

OUI, car $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^{k+1}}$ est une série géométrique positive convergente, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$.

c. $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\sqrt{1+k}$

NON, car $\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\sqrt{1+kt} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série positive divergente.

d. $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$

OUI, car $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ est une série positive convergente (par comparaison à une série de Riemann),

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$ (par télescopage).

2. Donner une condition sur le paramètre a pour que les fonctions suivantes définissent une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Dans tous les exercices, il faut $a > 0$, et $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = 1$, où n_0 est le plus petit entier de Ω .

a. $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{a^{k+2}}$

Pour que la série géométrique $\sum \mathbb{P}(\{k\})$ soit positive et convergente, il faut $a > 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+2}} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^2-a}.$$

On veut donc $\dfrac{1}{a^2-a} = 1$, avec $a > 1$. On trouve : $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b. $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{2^k a}{k!}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k a}{k!} = a\mathrm{e}^2$. On en déduit $a = \mathrm{e}^{-2}$.

c. $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{a}{k2^k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k2^k} = -a\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = a\ln 2$. On en déduit $a = \dfrac{1}{\ln 2}$.

d. $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{ak}{2^k}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ak}{2^k} = \frac{a}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{a}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2a$. On en déduit $a = \dfrac{1}{2}$.

e. $\Omega = [\![2; +\infty[\![, \forall k \geq 2 : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{a}{k^2-1}$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a}{k^2-1} = \frac{a}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{a}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right) - \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{3a}{4}$ (par télescopage). On en déduit $a = \dfrac{4}{3}$.

3. On considère les réels $p_{i,j} = \lambda \times \dfrac{a^{i+j}}{i!j!}, (i,j) \in \mathbb{N}^2, a > 0$.

a. Déterminer la valeur de λ pour laquelle les réels $p_{i,j}$ définissent la loi d'un vecteur aléatoire (X,Y) (c'est-à-dire $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{i,j}$).

On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda\frac{a^{i+j}}{i!j!} = \sum_{i=0}^{+\infty}\lambda\frac{a^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a^j}{j!}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\lambda\frac{a^i}{i!}\mathrm{e}^a = \lambda \mathrm{e}^{2a}$.

On en déduit que $p_{i,j}$ définissent la loi d'un vecteur aléatoire (X,Y) si, et seulement si $\lambda = \mathrm{e}^{-2a}$.

b. On suppose cette condition remplie. Déterminer les lois marginales de X et Y.

Soit $i \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} p_{i,j} = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^i}{i!}$; de même pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = j) = \mathrm{e}^{-a}\dfrac{a^j}{j!}$.

4. Dans chaque cas suivant, expliciter la loi de la variable aléatoire X, en préciser les paramètres, et donner son espérance et sa variance.

a. $X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = n+1) = \dfrac{a}{n+1}\mathbb{P}(X = n)$ où $a > 0$.

Une récurrence immédiate donne, pour tout $n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a^n}{n!}\mathbb{P}(X = 0)$.

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = n) = 1$, donc $\mathbb{P}(X = 0)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!} = 1$ d'où : $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-a}$.

Finalement, pour $n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-a}\dfrac{a^n}{n!}$, donc X suit une loi de Poisson de paramètre a, et $\mathbb{E}(X) = \mathrm{V}(X) = a$.

b. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, 3\,\mathbb{P}(X = n+2) = 4\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n)$.

La suite $(\mathbb{P}(X = n))_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont les racines de l'équation caractéristique sont 1 et $\dfrac{1}{3}$.

Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = n) = A + B\dfrac{1}{3^n}$.

La condition $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = n) = 1$ donne immédiatement $A = 0$, puis $B \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$ d'où $B = 2$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, donc X suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$, et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{2}$, et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{3}{4}$.