# TD 20 - Probabilités

**1.** Les fonctions suivantes définissent-elles une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ?

**a.** $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^k}$

**b.** $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$

**c.** $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\sqrt{1+k}$

**d.** $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$

**2.** Donner une condition sur le paramètre $a$ pour que les fonctions suivantes définissent une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

**a.** $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{a^{k+2}}$

**b.** $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{2^k a}{k!}$

**c.** $\Omega = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{a}{k 2^k}$

**d.** $\Omega = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{ak}{2^k}$

**e.** $\Omega = [\![2; +\infty[\![, \forall k \geq 2 : \mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{a}{k^2 - 1}$

**3.** On considère les réels $p_{i,j} = \lambda \times \dfrac{a^{i+j}}{i!j!}, (i,j) \in \mathbb{N}^2, a > 0$.

**a.** Déterminer la valeur de $\lambda$ pour laquelle les réels $p_{i,j}$ définissent la loi d'un vecteur aléatoire $(X, Y)$ (c'est-à-dire $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{i,j}$).

**b.** On suppose cette condition remplie. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.

**4.** Dans chaque cas suivant, expliciter la loi de la variable aléatoire $X$, en préciser les paramètres, et donner son espérance et sa variance.

**a.** $X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = n+1) = \dfrac{a}{n+1}\mathbb{P}(X = n)$ où $a > 0$.

**b.** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, 3\,\mathbb{P}(X = n+2) = 4\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n)$.