TD 19 - Fonctions à plusieurs variables

1. Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0;0)$ pour les fonctions suivantes, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

a. $f(x;y) = \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$

$\forall y \neq 0, f(0,y) = 0; \forall x \neq 0, f(x,x) = \dfrac{1}{3}$ donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.

b. $f(x,y) = \dfrac{\sin\, x \operatorname{sh} y}{xy}$

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, f(x,y) = h(x,y)g(x,y)$ où $h(x,y) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} y}{y}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc par composition, $h : (x,y) \mapsto x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admet pour limite 1 en $(0,0)$.
$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} y}{y} = 1$, donc par composition, $g : (x,y) \mapsto y \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} y}{y}$ admet pour limite 1 en $(0,0)$.
Par produit, f admet pour limite 1 en $(0,0)$.

c. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$

$\forall x \neq 0, f(x,0) = x$ donc si f admet une limite en $(0,0)$, c'est 0 ; or $\forall x \neq 0, f(x, x^2 - x) = 1$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

d. $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}$

$f(x,y) = \dfrac{1+xy+xy\,\varepsilon(xy)-1}{1+x+x\,\varepsilon(x)-1} = \dfrac{y(1+\varepsilon(xy))}{1+\varepsilon(x)}$ où $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.
Par composition, $(x,y) \mapsto xy \mapsto 1+\varepsilon(xy)$ admet pour limite 1 en $(0,0)$, donc par produit, $(x,y) \mapsto y(1+\varepsilon(xy))$ admet pour limite 0 en $(0,0)$;
par composition, $(x,y) \mapsto x \mapsto 1+\varepsilon(x)$ admet pour limite 1 en $(0,0)$.
Finalement, par quotient, f admet pour limite 0 en $(0,0)$.

e. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^8+y^6}$

On note $u(x,y) = (x^4, y^3)$ et $g(X,Y) = \dfrac{|X|^{\frac{3}{4}}|Y|^{\frac{4}{3}}}{X^2+Y^2}$.
$g(X,Y) \leq \dfrac{\|(X,Y)\|^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}}{\|(X,Y)\|^2} = \|(X,Y)\|^{\frac{1}{12}}$ donc g admet 0 pour limite en $(0,0)$.
On a : $|f(x,y)| = g(u(x,y))$, donc par composition, f admet 0 pour limite en $(0,0)$.

f. $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^4+y^6}$

Soit $\alpha > 0$; $\forall x \neq 0, f(x,x^\alpha) = \dfrac{x^{1+4\alpha}}{x^4+x^{6\alpha}}$. Pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$, on a $f(x,x^\alpha) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$, f n'a donc pas de limite en $(0,0)$.

2. Etudier la continuité en $(0;0)$ ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles première en $(0;0)$ pour les fonctions de deux variables réelles suivantes :

a. $f(x;y) = xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), \quad f(0,0)=0$

$|f(x,y)| \leq |xy| \leq \|(x,y)\|^2$ donc f est continue en $(0,0)$.
On remarque que $\forall (x,y), f(x,y) = f(y,x)$; on peut donc faire l'étude par rapport à la première variable, le résultat sera le même sur la seconde.
$\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ donc f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ qui valent : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$ par produit et composée de fonctions usuelles, f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x,y) qui vaut : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
La dérivée partielle par rapport à y s'obtient en intervertissant x et y dans la précédente.
$\forall x \neq 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = x\sin\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \dfrac{1}{2x}\cos\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$. En prenant $x = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}, n \to +\infty$, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = -\sqrt{n\pi}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
Finalement, les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

b. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^6}, \quad f(0,0)=0$

On note $u(x,y) = (x^2,y^3)$ et $g(X,Y) = \dfrac{|X|^{\frac{3}{2}}|Y|^{\frac{4}{3}}}{X^2+Y^2}$.
$g(X,Y) \leq \dfrac{\|(X,Y)\|^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}}{\|(X,Y)\|^2} = \|(X,Y)\|^{\frac{5}{6}}$ donc g admet 0 pour limite en $(0,0)$.
On a : $|f(x,y)| = g(u(x,y))$, donc par composition, f admet 0 pour limite en $(0,0)$, elle y est donc continue.
$\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$ donc f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ qui valent : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$ par produit et composée de fonctions usuelles, f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x,y) qui vaut : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-x^6y^4+3x^2y^{10}}{(x^4+y^6)^2}$
On a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \dfrac{x^6y^4+3x^2y^{10}}{(x^4+y^6)^2}$. En notant $v(x,y) = \dfrac{x^3y^{\frac{4}{3}}+3xy^{\frac{10}{3}}}{(x^2+y^2)^2}$ on a :
$|v(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|^{\frac{1}{3}}$ donc v admet 0 pour limite en $(0,0)$; comme $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |v(u(x,y))|$ on en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet pour limite 0 en $(0,0)$ donc que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$ par produit et composée de fonctions usuelles, f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x,y) qui vaut : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{4x^7y^3-2x^3y^9}{(x^4+y^6)^2}$
On a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{4|x|^7|y|^3+2|x|^3|y|^9}{(x^4+y^6)^2}$
En notant $w(x,y) = \dfrac{4|x|^{\frac{7}{2}}|y|+2|x|^{\frac{3}{2}}|y|^3}{(x^2+y^2)^2}$ on a :
$|w(x,y)| \leq 6\|(x,y)\|^{\frac{1}{2}}$ donc w admet une limite en $(0,0)$; comme $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |w(u(x,y)|$ on en déduit

que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet pour limite 0 en $(0,0)$ donc que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

c. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2-xy}, \quad f(0,0) = 0$

$|f(x,y)| = \dfrac{x^2|y|}{\left(y-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2} \leq \dfrac{x^2|y|}{\frac{3}{4}x^2} \leq \dfrac{4|y|}{3} \leq \dfrac{4}{3}\|(x,y)\|$ donc f est continue en 0.
$\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, $\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$ donc f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ qui valent : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$, par quotient de fonctions usuelles, f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x,y) qui vaut : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^3 - x^2y^2}{(x^2+y^2-xy)^2}$;
$\forall x \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 1$ donc la dérivée partielle de f par rapport à x en $(0,0)$ n'est pas continue.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$, par quotient de fonctions usuelles, f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x,y) qui vaut : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2-xy)^2}$;
$\forall x \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 1$, donc la dérivée partielle de f par rapport à y en $(0,0)$ n'est pas continue.

3. Déterminer les extrema locaux des applications f suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

a. $f(x,y) = x^3 + y^3$

$(0,0)$ est l'unique point critique.
$\forall x, f(x,0) - f(0,0) = x^3$ qui n'est pas de signe constant pour x au voisinage de 0 ;
$(0,0)$ est donc un point col.

b. $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2x^3$

$(0,0)$ et $(-1,0)$ sont les points critiques.
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6+12x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc :
$\hookrightarrow$ $\det(H_f(0,0)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(0,0)) > 0$ donc $f(0,0)$ est un minimum local.

<u>Autre méthode :</u>
$f(x,y) - f(0,0) = 3x^2\left(1 + \dfrac{2}{3}x\right) + y^2 \geq 0$, pour $|x| \leq \dfrac{3}{2}$.
On a donc bien un minimum local en $(0,0)$.

$\hookrightarrow$ $\det(H_f(-1,0)) < 0$ donc $(-1,0)$ est un point col.

<u>Autre méthode :</u>
$f(-1+h,0) - f(-1,0) = h^2(2h-3) < 0$ pour $|h| < \dfrac{3}{2}$ et $f(-1,y) - f(-1,0) = y^2 > 0$ pour $y \neq 0$.
$(-1,0)$ est bien un point col.

c. $f(x,y) = x^2 + xy - y^3$

$(0,0)$ et $\left(\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{6}\right)$ sont les points critiques.
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix}$ donc :
$\hookrightarrow$ $\det(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point col.

<u>Autre méthode :</u>

$f(0,y) - f(0,0) = -y^3$ qui n'est pas de signe constant pour y au voisinage de 0 ;
$(0,0)$ est bien un point col.

$\hookrightarrow$ $\det\left(H_f(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})\right) > 0$ et $\mathrm{tr}\,(H_f(0,0)) > 0$ donc $f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$ est un minimum local.

Autre méthode :
$f\left(\frac{1}{12} + h, -\frac{1}{6} + k\right) - f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) = h^2 + hk + \frac{1}{2}k^2 - k^3 = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + k^2\left(\frac{1}{4} - k\right) \geq 0$ pour $|k| \leq \frac{1}{4}$.

On a donc bien un minimum local en $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$.

d. $f(x,y) = 5x^5 + 10x^3y + 9xy^2 + 3y^2$
$(0,0)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}\right)$ sont les points critiques.
Remarque : le déterminant de la matrice hessienne est nul pour les deux points critiques !
$f(x,0) - f(0,0) = 5x^5$ qui n'est pas de signe constant pour x au voisinage de 0 ;
$(0,0)$ est un point col.
$f\left(x - \frac{1}{2}, -\frac{5}{12}\right) - f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}\right) = 5x^3\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{3}\right)$ qui n'est pas de signe constant pour x au voisinage de 0 ;
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}\right)$ est également un point col.