TD 18 - Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Le critère de d'Alembert donne $R = 3$.

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^{(-1)^n} z^n$. $\forall \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq 2^{(-1)^n} \leq 2$, donc $R = 1$.

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$. $\forall r > 0, \left(\frac{r}{1+\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n(\ln(r)-\ln(1+\sqrt{n}))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $R = +\infty$.

d. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$. $\forall r > 0, \mathrm{e}^{-n^2} r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $R = +\infty$.

e. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n! z^n$. Le critère de d'Alembert donne $R = 0$.

f. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n$. $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $R = 1$ (car le rayon de $\sum \frac{1}{n} z^n$ est 1).

g. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{\sin n} z^n$. $\forall \in \mathbb{N}, \mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{\sin n} \leq \mathrm{e}^1$, donc $R = 1$.

h. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) z^n$. $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
le critère de d'Alembert donne le rayon de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ égal à 1, donc $R = 1$.

i. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^n$. $\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc, d'après le critère de d'Alembert, $R = \frac{3}{2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme des séries entières suivantes ($z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$) :

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (2^n + 3^n) z^n$
les séries entières $\sum 2^n z^n$ et $\sum 3^n$ ont pour rayons de convergence $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement (ils sont donnés par le critère de d'Alembert ou directement avec la définition) ;
$2^n + 3^n \underset{+\infty}{\sim} 3^n$ donc le rayon de convergence de $\sum (2^n+3^n) z^n$ est $R = \frac{1}{3}$, et $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que

$|z| < R$, chaque série convergeant, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}2^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}3^n z^n = \frac{1}{1-2z}+\frac{1}{1-3z}$.

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \operatorname{sh} n\, z^n$

$\operatorname{sh} n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$; le critère de d'Alembert (ou la définition) donne le rayon de $\sum \mathrm{e}^n z^n$ égal à e^{-1}, donc $R = \mathrm{e}^{-1}$, et $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, chaque série convergeant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} n\, z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-1}z)^n\right) = \frac{\operatorname{sh} 1\, z}{1-2\operatorname{ch} 1\, z+z^2}.$$

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} z^n$

Le critère de d'Alembert donne $R = +\infty$, et $\forall z \in \mathbb{C}$, chaque série convergeant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n = z\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1}\right) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n = (z-1)\mathrm{e}^z.$$

d. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} x^n$

Le critère de d'Alembert donne $R = 1$.

$\forall n \geq 2$, $\dfrac{n}{n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n-1}\right)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, chaque série convergeant, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n\right)$

Si $x = 0$, la somme est nulle, sinon, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n = \frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x}{2}\ln(1-x)$.