TD 17 - Diagonalisation

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes, et les diagonaliser lorsque cela est possible :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 6/7 & 2/7 & -1/7 \\ 1/35 & -2/35 & 1/35 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A \qquad \chi_A = (X-2)^2(X-4)$

$\mathrm{Sp}(A) = \{2;4\}$; $\mathrm{m}(4) = 1$; $\mathrm{E}_4 = \mathrm{Vect}\{(0;1;1)\}$; $\mathrm{m}(2) = 2$; $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\{(1;1;0)\}$; $\dim(\mathrm{E}_2) < \mathrm{m}(2)$ donc la matrice n'est pas diagonalisable.

6. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A \qquad \chi_A = (X-4)^3$

$\mathrm{Sp}(A) = \{4\}$; $\mathrm{m}(4) = 3$; $\mathrm{E}_4 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$; $\dim(\mathrm{E}_4) < m(4)$ donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Remarque : on peut conclure que A n'est pas diagonalisable sans calculer E_4, car si A était diagonalisable, elle serait semblable à $4\mathrm{I}_3$, elle lui serait donc égale ($\forall P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), P4\mathrm{I}_3P^{-1} = 4\mathrm{I}_3$), ce qui est faux.