TD 16 - Calculs de déterminants

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -71$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=} 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1}}{=} 6 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

on développe suivant la première colonne :

$= 12 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \longleftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \longleftarrow C_2 + C_3}}{=} 12 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

on développe suivant la deuxième ligne :

$= -12 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 96$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

5. $\begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_4}}{=} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & -c & 0 & 0 \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \underset{C_3 \longleftarrow C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{b} \\ c & -c & 0 & 0 \\ 0 & c & 2a & a \end{vmatrix}$

on développe suivant la deuxième ligne :

$= b \begin{vmatrix} a & a & b \\ c & -c & 0 \\ 0 & c & 2a \end{vmatrix} \underset{C_2 \longleftarrow C_2+C_1}{=} b \begin{vmatrix} a & 2a & b \\ \boxed{c} & 0 & 0 \\ 0 & c & 2a \end{vmatrix}$

on développe suivant la deuxième ligne :

$= -bc(4a^2 - bc)$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Etablir une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}.

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\Delta_n = a\underbrace{\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} + (-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & \cdots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ n-2 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

En développant le deuxième déterminant par rapport à la première ligne :
$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}$

2. Montrer que $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)$.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$

Soit $n \geq 2$, on suppose que $\Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)$;

$\Delta_{n+1} = a\Delta_n - n^2 a^{n-1} = a^{n-1}\left(a^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right) - n^2 a^{n-1} = a^{n-1}\left(a^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2\right)$

Par principe de récurrence, le résultat est montré.