

TD 16 - CALCULS DE DÉTERMINANTS

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Etablir une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} .
2. Montrer que $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^{n-2} \left(a^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right)$.