TD 15 - Convergence d'intégrales

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Les fonctions que l'on intègre sont continues sur l'intervalle ouvert d'intégration, elles sont donc localement intégrables.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$

en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, la fonction intégrée se prolongeant par continuité en 0, l'intégrale converge.

2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan} x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

La fonction que l'on intègre est positive sur $]0;+\infty[$.

en 0 : $\dfrac{\mathrm{Arctan} x}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{0}{\sim} x^{\frac{-1}{2}}$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan} x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ converge.

en $+\infty$: $\forall x > 0, 0 \leq \dfrac{\mathrm{Arctan} x}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}}$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan} x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, l'intégrale J converge.

3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$

La fonction que l'on intègre est positive sur $]0;1]$.

en 0 : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$; par comparaison à une intégrale usuelle, l'intégrale diverge.

4. $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$

La fonction que l'on intègre est positive sur $[1;+\infty[$.

en $+\infty$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$; par comparaison à une intégrale usuelle, l'intégrale converge.

5. $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

La fonction que l'on intègre est positive sur $]0;1]$.

en 0 : $\dfrac{1}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$;par comparaison à une intégrale usuelle, l'intégrale diverge.

6. $N = \displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

en 0 : $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$; par majoration, la fonction est intégrable sur $]0;1]$ et l'intégrale converge.

7. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\ln x \,\mathrm{d}x$

en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{e}^{-x}\ln x = 0$ (croissances comparées) ; la fonction se prolongeant par continuité en 0, $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\ln x \,\mathrm{d}x$ converge.

en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x}\ln x = 0$ (croissances comparées), donc $x\mathrm{e}^{-x}\ln x = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\ln x \,\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion l'intégrale A converge.

8. $P = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

La fonction que l'on intègre est positive sur $[1;+\infty[$.

en $+\infty$: Pour $x > \mathrm{e}$, $\dfrac{\ln x}{x} \geq \dfrac{1}{x}$; par comparaison à une intégrale usuelle, l'intégrale diverge.

9. $Q = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

Pour $\varepsilon \in]0;1]$, on a : $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2}(\ln(\varepsilon))^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -\infty$; l'intégrale diverge.

10. $R = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Sur $]0;1]$ la fonction que l'on intègre est de signe constant.

en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{4}}\ln x = 0$ (croissances comparées) donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, l'intégrale converge.

11. $S = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x \,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

en 0 : Sur $]0;1]$ la fonction intégrée est de signe constant.

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,\ln x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissances comparées) donc $\ln x\,\mathrm{e}^{-x} = o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

en $+\infty$: Sur $[1;+\infty[$ la fonction intégrée est de signe constant.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissances comparées) donc $\ln x\,\mathrm{e}^{-x} = o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, l'intégrale S converge.

12. $T = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}\mathrm{d}x$

en 0 : Sur $]0;1]$ la fonction intégrée est de signe constant.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\frac{\ln x}{1+x^3} = 0$ (croissances comparées) donc $\displaystyle\frac{\ln x}{1+x^3} = o_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^3}\mathrm{d}x$ converge.
en $+\infty$: Sur $[1;+\infty[$ la fonction intégrée est de signe constant.
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\frac{\ln x}{1+x^3} = 0$ (croissances comparées) donc $\displaystyle\frac{\ln x}{1+x^3} = o_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}\mathrm{d}x$ converge.
En conclusion, l'intégrale T converge.

13. $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}}$

La fonction que l'on intègre est positive sur $[0;1[$.
en 1 : $\displaystyle\frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x} \underset{1}{\sim} \frac{2}{1-x}$; pour $a \in [0;1[$, $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\ln(1-a) \underset{a\to 1}{\to} +\infty$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1-x}\mathrm{d}x$ diverge, donc, par comparaison, l'intégrale U diverge.

14. $V = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - \cos x}\mathrm{d}x$

La fonction que l'on intègre est positive sur $]0;+\infty[$.
en 0 : $\displaystyle\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\cos x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\cos x}\mathrm{d}x$ converge.
en $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\cos x} = 0$ (croissances comparées) donc $\displaystyle\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\cos x} = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\cos x}\mathrm{d}x$ converge.
En conclusion, l'intégrale V converge.

15. $W = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

en 0 : $\forall x > 0$, $\displaystyle\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leq 1$ donc $\forall t \in]0;1]$, $\displaystyle\int_t^1 \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\mathrm{d}x \leq 1$; par majoration, la fonction est intégrable sur $]0;1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.
en $+\infty$: Pour x suffisamment grand, $\sin\dfrac{1}{x^2}$ est positif, et $\sin\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.
En conclusion, l'intégrale W converge.

16. $X = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Pour $0 < \varepsilon \leq a < 1$, $\displaystyle\int_\varepsilon^a \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = [\ln|\ln x|]_\varepsilon^a$; $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \ln|\ln \varepsilon| = +\infty$: l'intégrale diverge.

17. $Y = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Pour $2 \leq M$, $\displaystyle\int_2^M \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = [\ln|\ln x|]_2^M$; $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \ln|\ln M| = +\infty$: l'intégrale diverge.

18. $Z = \displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

La fonction que l'on intègre est de signe constant sur $\left]\frac{2}{\pi};+\infty\right[$.

<u>en $+\infty$:</u> $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^2}$; par comparaison à une intégrale usuelle, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge.

<u>en $\frac{2}{\pi}$:</u> $\cos\frac{1}{x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)$, on a donc $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{\frac{2}{\pi}}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)$.

En posant $x = \frac{2}{\pi} + u$, on a : $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\frac{2}{\pi}+u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{4}u$.

La fonction ln est intégrable au voisinage de 0, donc par comparaison, en appliquant le théorème de changement de variable on en déduit que $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^1 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, l'intégrale Z converge.