T.D. 14 : Séries numériques CORRECTION

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

i) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ converge.

ii) $u_n = \dfrac{1}{n}\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ converge.

iii) $u_n = e^{\cos(n)}$ $\sum u_n$ est grossièrement divergente, (u_n) n'ayant pas limite en $+\infty$.

iv) $u_n = \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{n^n}$ avec $0 < \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ pour $2 \leq n$, donc par comparaison à une série géométrique $\sum \dfrac{1}{n^n}$ converge et par suite $\sum u_n$ converge.

v) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ converge.

vi) $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

vii) $u_n = a^{\sqrt{n}}$ (en fonction du réel strictement positif a)
si $1 \leq a$, $\sum u_n$ diverge grossièrement ; si a < 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $\sum u_n$ converge.

viii) $u_n = n^{-\cos\frac{1}{n}} \geq \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

ix) $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

x) $u_n = 1 - \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison, $\sum u_n$ converge.

2. Soient $\sum \mathrm{u}_n$ et $\sum \mathrm{v}_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

Remarque : La convergence de ces séries assure la convergence de la série $\sum (\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n)$.

Montrer que les séries suivantes sont également convergentes :

i) $\sum \max(\mathrm{u}_n ; \mathrm{v}_n)$ $0 \leq \max(\mathrm{u}_n, \mathrm{v}_n) \leq \mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n$

ii) $\sum \sqrt{\mathrm{u}_n \mathrm{v}_n}$ $0 \leq \sqrt{\mathrm{u}_n \mathrm{v}_n} \leq \dfrac{1}{2}(\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n)$

iii) $\sum \dfrac{\mathrm{u}_n \mathrm{v}_n}{\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n}$ $0 \leq \dfrac{\mathrm{u}_n \mathrm{v}_n}{\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n} \leq \mathrm{u}_n$