

T.D. 14 : Séries numériques

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

i) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ii) $u_n = \frac{1}{n} \operatorname{Arc tan}\left(\frac{1}{n}\right)$

iii) $u_n = e^{\cos(n)}$

iv) $u_n = \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$

v) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

vi) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

vii) $u_n = a^{\sqrt{n}}$ (en fonction du réel strictement positif a)

viii) $u_n = n^{-\cos\frac{1}{n}}$

ix) $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

x) $u_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}$

2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

Montrer que les séries suivantes sont également convergentes :

i) $\sum \max(u_n; v_n)$

ii) $\sum \sqrt{u_n v_n}$

iii) $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$