1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis déterminer l'image et le noyau.

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $f_1(x ; y ; z) = (2x ; x + y ; 2x - 3z)$.

$\text{mat}(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_1) = \{0\}$; $\text{Im}(f_1) = \mathbb{R}^3$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $f_2(x ; y) = (x + y ; x - y ; xy)$.

f_2 n'est pas linéaire : $f_2(1 ; 0) + f_2(0 ; 1) \neq f_2(1 ; 1)$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $f_3(x ; y ; z) = (x + y ; z)$.

$\text{mat}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_3) = \text{Vect}\{(1 ; -1 ; 0)\}$; $\text{Im}(f_3) = \mathbb{R}^2$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ / $f_4(P) = P(0)\,X^0 + P(1)\,X + P(2)\,X^2$

$\text{mat}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_4) = \{0\}$; $\text{Im}(f_1) = \mathbb{R}_2[X]$.

v) $f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ / $f_5(P) = P(0)\,X^0 + P(1)X + P(2)\,X^2$.

$\text{mat}(f_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f_5) = \text{Vect}\{2X - 3X^2 + X^3\}$; $\text{Im}(f_5) = \mathbb{R}_2[X]$.

2. Pour chacune des matrices ci-dessous, expliciter l'application linéaire canoniquement associée, puis en déterminer l'image et le noyau.

i) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $f_1(x ; y ; z) = (x - 2y + 4z ; -x - 2y ; 0)$.

$\text{Ker}(f_1) = \text{Vect}\{(-2 ; 1 ; 1)\}$; $\text{Im}(f_1) = \text{Vect}\{(1 ; -1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 0)\}$.

ii) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $f_2(x ; y ; z) = (x - 2y + 4z ; -x - 2y)$.

$\text{Ker}(f_2) = \text{Vect}\{(-2 ; 1 ; 1)\}$; $\text{Im}(f_2) = \text{Vect}\{(1 ; -1) ; (1 ; 0)\}$.

iii) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $f_3(x ; y) = (x - y ; -2x - 2y ; 4x)$.

$\text{Ker}(f_3) = \{0\}$; $\text{Im}(f_3) = \text{Vect}\{(1 ; -2 ; 4) ; (1 ; 2 ; 0)\}$.