T.D. 12 : Espaces vectoriels **CORRECTION**

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?
Si oui, en donner une base et un supplémentaire.

i) $E_1 = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 / \; x + y - z = 0 \}$ = Vect{(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 1)}

Soit H_1 = Vect{(1 ; 0 ; 0)} ; $E_1 \oplus H_1 = \mathbb{R}^3$

(il faut vérifier que la famille {(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 1) ; (1 ; 0 ; 0)} est bien libre.)

ii) $E_2 = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + y - z = 1 \}$ n'est pas un s-e-v de $\mathbb{R}^3$ car $(0 ; 0 ; 0) \notin E_2$

iii) $E_3 = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z = 0 \}$ = Vect{(1 ; 0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)}

(il faut vérifier que la famille {(1 ; 0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)} est bien libre.)

Soit H_3 = Vect{(1 ; 0 ; 0 ; 0)} ; $E_3 \oplus H_3 = \mathbb{R}^4$

(il faut vérifier que la famille {(1 ; 0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1) ; (1 ; 0 ; 0 ; 0)} est bien libre.)

iv) $E_4 = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ ou } 2x + z + t = 0\}$ n'est pas un s-e-v de $\mathbb{R}^4$:

$u = (1 ; -1 ; 0 ; 0) \in E_4$; $v = (0 ; 1 ; 0 ; 0) \in E_4$; mais $u + v \notin E_4$.

v) $E_5 = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ et } 2x + z + t = 0\}$ = Vect{(1 ; -1 ; 0 ; -2) ; (0 ; 0 ; 1 ; -1) }

Soit H_5 = Vect{(1 ; 0 ; 0 ; 0) ; (0 ; 1 ; 0 ; 0)} ; $E_5 \oplus H_5 = \mathbb{R}^4$

(il faut vérifier que la famille {(1 ; -1 ; 0 ; -2) ; (0 ; 0 ; 1 ; -1) ; (1 ; 0 ; 0 ; 0) ; (0 ; 1 ; 0 ; 0)} est bien libre.)

vi) $E_6 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(0) = 0\}$ = Vect{X ; X^2}

Soit H_6 = Vect{1} ; $E_6 \oplus H_6 = \mathbb{R}_2[X]$

vii) $E_7 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(0) = 0 \text{ et } \tilde{P}(1) = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$ car $P = 0 \notin E_7$.

viii) $E_8 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$ = Vect{ $X^2 - 1$ }

Soit H_8 = Vect{1 ; X} ; $E_8 \oplus H_8 = \mathbb{R}_2[X]$
(la famille {1 ; X ; $X^2 - 1$}est libre, car échelonnée en degrés).

ix) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$ = Vect{ $X^3 - X$; $X^2 - 1$}

Soit H_9 = Vect{1 ; X} ; $E_9 \oplus H_9 = \mathbb{R}_3[X]$
(la famille {1 ; X ; $X^2 - 1$; $X^3 - X$ }est libre, car échelonnée en degrés).

2. Les familles suivantes sont-elles libres ?

i) Dans $\mathbb{R}^4$: { e_1; e_2 ; e_3} tels que : $e_1 = (1 ; -1 ; 0 ; 1)$, $e_2 = (0 ; 2 ; -1 ; 1)$, $e_3 = (-2 ; 1 ; -2 ; 0)$. Libre

ii) Dans $\mathbb{R}^4$: { e_1; e_2 ; e_3} tels que : $e_1 = (1 ; -1 ; 0 ; 1)$, $e_2 = (0 ; 2 ; -1 ; 1)$, $e_3 = (1 ; -5 ; 2 ; -1)$ Liée ($e_3 = e_1 - 2e_2$).

iii) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: { f_1; f_2 ; f_3} tels que $f_1(x) = \text{ch}(x)$, $f_2(x) = \text{sh}(x)$, $f_3(x) = e^x$. Liée ($f_3 = f_1 + f_2$)

iv) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: { f_1; f_2 ; f_3} tels que $f_1(x) = \text{ch}(x)$, $f_2(x) = \text{sh}(x)$, $f_3(x) = e^{2x}$. Libre

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, 2\lambda_3 e^{3x} + (\lambda_1 + \lambda_2) e^{2x} + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*, 2\lambda_3 y^3 + (\lambda_1 + \lambda_2) y^2 + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0\right)$

Le polynôme $2\lambda_3 X^3 + (\lambda_1 + \lambda_2) X^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)$ ayant une infinité de racines, il est nul.

On en déduit que $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, et par suite que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

v) Dans $\mathbb{R}[X]$: {X ; 1 ; $X^2 - 1$; $X(X^2 - 1)$}. Libre (famille échelonnée en degrés !).

vi) Dans $\mathbb{R}[X]$: {$X + 1$; $X - 1$; $X^2 - 1$}. Libre